Problema I. *ELASTICITATE* *(A. + B. + C.)*	**Parţial**	**Punctaj**
I. Barem subiect I		**10 puncte**
I.A. Constantele elastice ale resorturilor		**3 puncte**
Conform legii Hooke-Young constanta de elasticitate a unei bare este dată de formula $k = SE/\ell$ în care E este modulul de elasticitate al materialului, S este secţiunea transversală iar ℓ este lungimea în stare nedeformată. De aici putem desprinde concluzia că, dimensional, constanta k este direct proporţională cu o „ ***lungime caracteristică*** ” d a corpului investigat. Pe această bază vom scrie relaţia $k = CEd$, în care C este o constantă adimensională.	**1 p**	
În cazul celor două resorturi confecţionate din acelaşi material $E_1 = E_2$, adică putem scrie relaţia $k_1/d_1 = k_2/d_2$, sau, echivalent, $k_2/k_1 = d_2/d_1$..	**0,75 p**	
Din enunţ constatăm că raportul diametrelor exterioare ale resoartelor (9/3 =3) ca şi raportul diametrelor sârmelor din care s-au „bobinat” ele (0,6/0,2=3) este acelaşi. Rezultă că dacă al doilea resort ar avea lungimea doar de 3 cm (şi nu de 7 cm, cum este în realitate), el ar avea constanta de elasticitate $k_2' = 3k_1 = 42$ N/m.	**0,50 p**	
În realitate, având lungimea mai mare, adică de 7 cm, constanta sa de elasticitate este egală cu fracţiunea 3/7 din valoarea ce ar corespunde totalei echivalenţe: $k_2 = (3/7)k_2' = 18$ N/m..	**0,75 p**	
Observaţie, pentru lămurirea corectorilor /evaluatorilor: (nu aparține baremului !!!) Ultimul pas al raţionamentului poate fi argumentat şi cu ajutorul formulei $k^{-1} = \sum_{j=1}^{n} k_j^{-1}$, cu care se determină constanta echivalentă a n resoarte diferite legate în serie. Să o aplicăm în două situaţii diferite, când al doilea resort din enunţul problemei, în loc să aibă lungimea de 7 cm (cum se spune în enunț) ar avea lungimea de: a.) 6 cm, respectiv b.) de 9 cm. Deoarece, în cazul **a.),** scriind 6 cm = 3 cm + 3 cm, putem considera că ar fi vorba de două resoarte identice (cu constanta de elaticitate $k_2' = 42$ N/m) legate în serie ; astfel ar rezulta $k_{echivalent} = k_2'/2 = 21$ N/m. În cazul **b.**), scriind că 9 cm = 3 cm + 3 cm + 3 cm, avem de-a face cu trei resoarte identice înseriate şi, corespunzător, $k_{echivalent} = k_2'/3 = 14$ N/m. Acum se constată că valoarea găsită mai sus, de 18 N/m, este o valoare cuprinsă între 14 N/m şi 21 N/m , deoarece raportul 7/3 = 2,33(3) este cuprins între 2 şi 3.		

1. Fiecare dintre subiectele **I**, **II**, respectiv **III** se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerinţele a, b, respectiv c.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

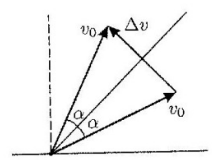
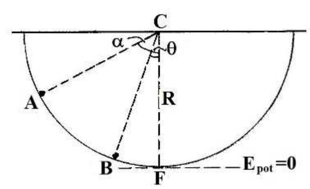
Ministerul Educației Naționale
Inspectoratul Școlar Județean – NEAMȚ
CONCURSUL NAȚIONAL DE FIZICĂ "EVRIKA!"
Ediția a XXVII-a – Piatra Neamț
31 martie- 2 aprilie 2017
BAREM – Clasa a IX-a

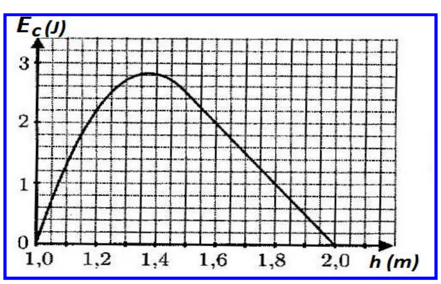
IX

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

I.B. Epruvete cu proprietăți elastice		**3 puncte**
Când o bară elastică omogenă de lungime L și secțiune transversală S este atârnată vertical cu un capăt de un cârlig fix iar de celălalt capăt se trage longitudinal, în jos, cu o forță constantă F, tensiunea în lungul barei variază de la valoarea $F_1 = F$, în partea de jos, la valoarea $F_2 = F + \rho SLg$ (aici ρ este densitatea materialului din care e confecționată bara). Dependența fiind liniară, putem lucra cu forța medie $\overline{F} = (F_1 + F_2)/2 = F + (1/2)\cdot\rho SLg$ și alungirea barei este dată de legea Hooke $\Delta x = L\overline{F}/ES = FL/ES + \rho g L^2/2E$, (*) (desigur, E este modulul de elasticitate Young al materialului) **……………………..………**	**1 p**	
1.) Când forța exterioară F lipsește, pentru cele două bare putem scrie alungiri de forma $\Delta L_1 = \rho_1 g L_1^2 / 2E_1$, respectiv $\Delta L_2 = \rho_2 g L_2^2 / 2E_2$. Din aceste relații rezultă următorul raport al lungimilor inițiale $L_1 / L_2 = \sqrt{\rho_2 E_1 \Delta L_1 / \rho_1 E_2 \Delta L_2} = 3$.**…………………………………………**	**1 p**	
2.) Conectate/sudate între ele, barele pot fi atârnate de cârligul fix în două moduri diferite. Analizăm cazul când capătul nesudat al barei 1 este atârnat de cârlig. Alungirea totală este $\Delta L_{12} = \Delta L_1' + \Delta L_2$, în care $\Delta L_1'$ se determină cu formula (*) în care $F = \rho_2 g S L_2$ (greutatea barei 2). Astfel, în cele din urmă, găsim expresia $\Delta L_{12} = \Delta L_1 + \Delta L_2 + 2\sqrt{\Delta L_1 . \Delta L_2 (\rho_2 E_2 / \rho_1 E_1)} = 13\,\mathrm{mm}$. În celălalt caz, alungirea totală este: $\Delta L_{21} = \Delta L_1 + \Delta L_2 + 2\sqrt{\Delta L_1 . \Delta L_2 (\rho_1 E_1 / \rho_2 E_2)} = 20\,\mathrm{mm}$. **…………….………….**	**1 p**	
I.C. Resorturi înseriate		**3 puncte**
Forțele elastice ce acționează în resorturile alungite sunt egale, putând scrie $k_1 \Delta\ell_1 = k_2 \Delta\ell_2$. Alungirea totală este $\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$ și din aceste relații deducem că $\Delta\ell_1 = \Delta\ell \cdot k_2 /(k_1 + k_2)$ (*), respectiv $\Delta\ell_2 = \Delta\ell \cdot k_1 /(k_1 + k_2)$. (**) ……………..	**1 p**	
Constanta de elasticitate echivalentă a resorturilor legate în serie este $k = k_1 k_2 /(k_1 + k_2)$. Cu ajutorul ei putem scrie următoarea formulă pentru lucrul mecanic total: $L = (k/2)\cdot(\Delta\ell)^2 = [k_1 k_2 / 2(k_1 + k_2)](\Delta\ell)^2$. Invers $(\Delta\ell)^2 = 2L\cdot(k_1 + k_2)/k_1 k_2$. ……………………………..…………	**1 p**	
Pe de altă parte $E_1 = (k_1/2)\cdot(\Delta\ell_1)^2$, respectiv $E_2 = (k_2/2)\cdot(\Delta\ell_2)^2$, unde putem utiliza relațiile (*) și (**). În final obținem $E_1 = L\cdot k_2 /(k_1 + k_2) = 0{,}4\,\mathrm{J}$, respectiv $E_2 = L\cdot k_1 /(k_1 + k_2) = 0{,}6\,\mathrm{J}$. ……………………………………………………	**1 p**	
Din oficiu – **Problema I**		**1 punct**
		10 puncte

1. Fiecare dintre subiectele **I**, **II**, respectiv **III** se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele a, b, respectiv c.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Problema II. *(A+B : Catapultă + Cupă semisferică)*		
II. A. Catapulta		**4 puncte**
Dacă unghiul dintre suportul vitezei inițiale (de lansare) $\vec{v}_0$ și orizontală este θ, bătaia este dată de formula $B = (v_0^2/g)\sin(2\theta)$. Rezultă că unghiurile de lansare are biluţelor satisfac relaţia (sunt complementare) $\theta_1 + \theta_2 = 90^0$. ……………..	0,50 p	
Vectorii $\vec{v}_{01}$ şi $\vec{v}_{02}$ sunt dispuşi simetric faţă de prima bisectoare, căci $\sin[2(45^0 - \alpha)] = \sin[2(45^0 + \alpha)]$. ………………………………………………..	0,50 p	
Cel mai scurt timp de zbor este al biluţei "de jos", lansată cu unghiul $(45^0 - \alpha)$. Acest timp este dat de formula $t_{zbor} = (2v_0/g)\sin(45^0 - \alpha)$. Pentru $t < t_{zbor}$ ambele biluţe se află în aer. ………………………………………… 	0,50 p	
Să ne plasăm, mental, în referenţialul biluţei "de jos", urmărind din acest reper, mişcarea celeilalte biluţe. Viteza ei este $\Delta v = 2v_0 \sin\alpha$ (vezi desenul alăturat). ………………………………………………………..……	0,75 p	
În timpul zborului, distanţa dintre această biluţă ("de sus") şi cea "de jos" este: $L = \Delta v \cdot t_{zbor} = \left(4v_0^2/g\right)\sin\alpha \cdot \sin(45^0 - \alpha) = \left(2v_0^2/g\right)\cdot\left[\cos(2\alpha - 45^0) - \cos 45^0\right]$. …..	1 p	
Maximul expresiei corespunde lui $\cos(2\alpha - 45^0) = 1$, deci lui $\alpha = 22{,}5^0$ şi $L_{\max} = \left(2v_0^2/g\right)\cdot\left[1 - \cos 45^0\right] = \left(2v_0^2/g\right)\cdot\left(1 - 1/\sqrt{2}\right)$. ………………………………	0,75 p	
II.B. O cupă semisferică		**5 puncte**
a.) Desen cu situația fizică și notațiile utilizate. Pe desen, **A** este locul de unde se eliberează corpul, iar **B** este o poziție intermediară oarecare. ……………………………………………….. 	0,50 p	
Neexistând forțe de frecare conservarea energiei înseamnă $W_A = W_B$, adică $0 + mgR(1-\cos\alpha) = mv^2/2 + mgR(1-\cos\theta)$. De aici $v^2 = 2gR(\cos\theta - \cos\alpha)$. …………………	1 p	
Accelerația normală (centripetă) din B este $a_n = v^2/R = 2g(\cos\theta - \cos\alpha)$. Cea tangențială are expresia $a_t = g\sin\theta$ (ca pe planul înclinat). Prin urmare, **modulul accelerației totale** $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ este dat de relația: $a^2 = a_n^2 + a_t^2 = 4g^2(\cos^2\theta - 2\cos\alpha\cdot\cos\theta + \cos^2\alpha) + g^2(1-\cos^2\theta)$. ………..	1 p	
Rezultă că, pentru un unghi α fixat, accelerația a depinde de poziția		

instantanee a corpului (de unghiul θ). Cu notația $\rho \equiv \cos\theta$ avem : $a^2(\rho) == g^2(3\rho^2 - 8\rho\cos\alpha + 4\cos^2\alpha + 1)$. Dacă în interiorul parantezei rotunde adunăm și scădem cantitatea $[(4/\sqrt{3})\cos\alpha]^2$, putem forma un pătrat perfect ce conține variabila ρ, în exteriorul său rămânând doar termeni dependenți de α. Avem $a^2(\rho) = g^2\left[\left(\rho\sqrt{3} - \frac{4\cos\alpha}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{16\cos^2\alpha}{3} + 4\cos^2\alpha + 1\right]$. Această expresie este minimă atunci când pătratul perfect se anulează, adică atunci când $\rho = (4/3)\cos\alpha$. Corespunzător găsim $a_{\min}^2 = g^2[1-(4/3)\cos^2\alpha]$. . ……………	1 p	
Minimul accelerației se atinge înainte de a se ajunge în fundul **F** al cupei dacă $\cos\theta = (4/3)\cos\alpha < 1$, adică atunci când unghiul locului de start satisface restricția $\cos\alpha < 3/4$ (adică pentru $\alpha > 41{,}41^0$). ………………………………	0,50 p	
Pe de altă parte, $a_{\min}$ este o cantitate reală atunci când $1 > (4/3)\cos^2\alpha$, adică pentru $\cos\alpha < \sqrt{3}/2$, ceea ce înseamnă $\alpha > 30^0$. ………………..……………	0,50 p	
Cele două cerințe sunt îndeplinite în același timp pentru $\alpha > \arccos(3/4) \approx 41{,}41^0$ ………………………………………………………………………………………	0,50 p	
Din **oficiu** — **Problema II**		**1 punct**
Problema III.		**10 puncte**
III. Resort și bilă În prima etapă a căderii (până la atingerea resortului), când $L_0 < h < H$, energia cinetică a bilei este egală cu descreșterea energiei sale potențiale, adică $E_{cin.} = mg(H-h)$, (*). Astfel, din panta dependenței liniare obținem ușor că $mg = \Delta E_{cin.}/\Delta h = 5N$, ceea ce ne dă $m = 0{,}5$ kg . ……….........................……	1,50 p	10 puncte
Lungimea L_0 a resortului se determină din valoarea lui h corespunzătoare momentului în care începe să nu mai existe dependența liniară descrisă de formula (*). Avem $L_0 = 1{,}5$ m . ………...……	2 p	
 După contactul (și lipirea) bilei cu resortul, descreșterea energiei potențiale gravitaționale este egală cu suma dintre energia cinetică a bilei și creșterea energiei potențiale de deformare a resortului. Putem scrie $mg(H-h) = (k/2)(L_0 - h)^2 + E_c$ …….……	2 p	

1. Fiecare dintre subiectele **I**, **II**, respectiv **III** se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerinţele a, b, respectiv c.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Observăm că energia cinetică E_c are o dependență pătratică de înălțimea h. Din cursul de algebră se știe că maximul trinomului de gradul al II - lea $y = ax^2 + bx + c$ se atinge pentru $x_m = -b/2a$. În cazul trinomului $E_c(h) = -(k/2)h^2 + (kL_0 - mg)h + mgH - (k/2)L_0^2$, obținem $b \to kL_0 - mg$ și $a \to -k/2$, astfel încât $h_m = L_0 - mg/k$. .... De pe grafic identificăm valoarea lui h_m ca fiind 1,375 m și rezultă $k = mg/(L_0 - h_m) = 5/(1{,}5 - 1{,}375) = 5/0{,}125 = 40N/m.$ .... **Se poate accepta intervalul 1,35 → 1,40 m pentru h_m și 33,3 → 50 N/m pentru constanta sa de elasticitate k a resortului.**	**2 p** **1,5 p**	
Din **oficiu** **– Problema III**		**1 punct**

Barem propus de:

prof. univ. dr. Florea **ULIU**, Departamentul de Fizică, Universitatea din Craiova;
prof. Dumitru **ANTONIE**, Colegiul Tehnic nr. 2, Tg. – Jiu.