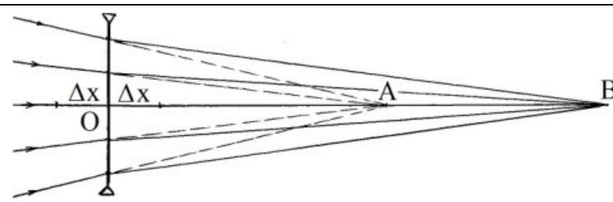
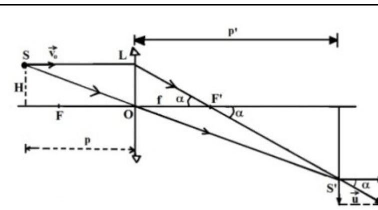
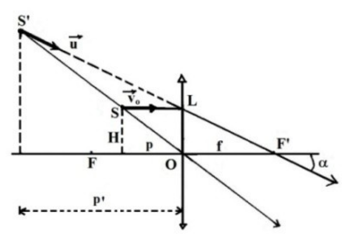
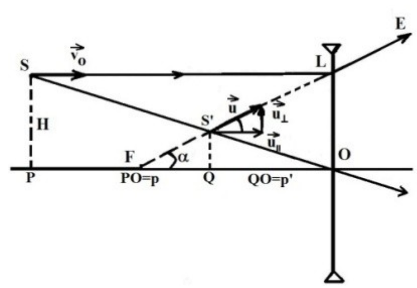
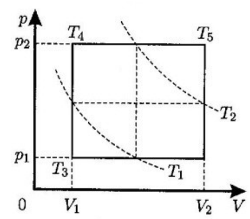
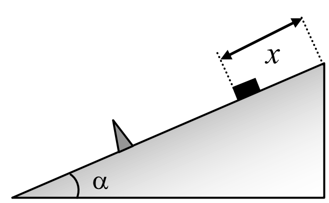
Concursul Naţional de Fizică „Evrika” ediţia XXV
Martie 2015
Barem– Clasa a X-a

X

Subiect I: O combinaţie (două probleme distincte) de Optică geometrică.	Parţial	Punctaj
Barem subiect I		**10 p**
A. O lentilă divergentă mobilă.		**4,50 p**
Utilizăm principiul reversibilităţii, raţionând în felul următor. În situaţia iniţială, considerăm punctul B ca obiect real, iar punctul A ca imagine (virtuală), putând scrie $\frac{1}{OB}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{f}$ (*) 	**0,75 p**	**4,50 p**
În a doua situaţie, când centrul optic al lentilei este situat în punctul O′, iar punctul obiect real este în C, imaginea sa virtuală s-a mutat în A, cu distanţa $O'A=OA-\Delta x=a-\Delta x$. Aici $OO'=\Delta x$. Avem următoarea relaţie a punctelor conjugate $\frac{1}{O'C}-\frac{1}{a-\Delta x}=-\frac{1}{f}$ (**)	**0,75p**	
În a treia situaţie putem scrie $\frac{1}{\infty}-\frac{1}{a+\Delta x}=-\frac{1}{f}$. De aici rezultă că $f=a+\Delta x=11\,\text{cm}$.	**0,75 p**	
Din relaţia (*) găsim $OB=\frac{a.f}{f-a}=\frac{a(a+\Delta x)}{\Delta x}$. Numeric, $OB=110\,\text{cm}$.	**0,75 p**	
Din relaţia (**) deducem că $O'C=\frac{f\cdot(a-\Delta x)}{f-a+\Delta x}$, cu valorea numerică $O'C=99/2=49{,}5\,\text{cm}$. Distanţa CB se calculează cu formula: $CB=OB-OC=OB-(\Delta x+O'C)=\frac{a(a+\Delta x)}{\Delta x}-\Delta x-\frac{f(a-\Delta x)}{f-a+\Delta x}=\frac{a(a+\Delta x)}{\Delta x}-\Delta x-\frac{a^2-\Delta x^2}{2\Delta x}$.	**0,75 p**	
După simplificări $CB=\frac{a^2+2a\Delta x-\Delta x^2}{2\Delta x}=\frac{100+20-1}{2}=\frac{119}{2}=59{,}5\,\text{cm}$.	**0,75 p**	
B. Optică geometrică cu vectori.		**4,50 p**
Desen corect pentru imaginea reală. 	**0,25 p**	
Raza $SLF'S'$ are acelaşi traiect indiferent de poziţia sursei S faţă de lentilă. Altfel spus, vectorul $\vec{u}$ are suportul LF' Atâta timp cât $p>f$ este mereu valabilă formula de conjugare optică $1/p+1/p'=1/f$. Vom scrie $\Delta p=v_0\Delta t$ şi $\Delta p'=u\Delta t\cos\alpha$, ţinând cont că	**0,25 p**	

atunci când p scade, p' crește. Astfel avem relaţia: $1/(p-v_0\Delta t)+1/(p'+u\Delta t\cos\alpha)=1/p+1/p'=1/f$	0,5 p	4,50 p
Scriem această relaţie (egalitate) sub forma $1/(p-v_0\Delta t)-1/p=1/p'-1/(p'+u\Delta t\cos\alpha)$, adică $\dfrac{v_0\Delta t}{p(p-v_0\Delta t)}=\dfrac{u\Delta t\cos\alpha}{p'(p'+u\Delta t\cos\alpha)}$. Dacă ne referim la momentul când $u=v_0$ şi luăm limita $\Delta t\to 0$, de aici găsim că $p'=p\sqrt{\cos\alpha}$. În acel moment putem scrie: $1/p+1/p'=1/f=(1/p)[1+1/\sqrt{\cos\alpha}]$, adică $p=f[1+1/\sqrt{\cos\alpha}]$.	0,5 p	
Cosinusul se poate exprima prin relaţia $\cos\alpha=f/\sqrt{f^2+H^2}=1/\sqrt{1+(H/f)^2}$ şi astfel $p=f[1+\sqrt[4]{1+(H/f)^2}]$.	0,25 p	
Pe de altă parte, $u_\perp=u\sin\alpha=v_0\sin\alpha=v_0/\sqrt{1+(f/H)^2}$	0,25 p	
 Procedând ca mai sus, se poate verifica faptul că atunci când $p<f$ (imaginea sursei este virtuală), nu este posibilă satisfacerea condiţiei $u=v_0$. Din formula $1/p-1/p'=1/f$, cu $p'=p\sqrt{\cos\alpha}$ ar rezulta o distanţă p negativă (lucru imposibil !).	0,75 p	
Analizăm acum cazul unei lentile subţiri divergente. Desen corect 	0,25 p	
Formula $1/p-1/p'=-1/f$ ne arată că p şi p' variază în acelaşi sens: pentru descreşterea $p\to p-v_0\Delta t$, corespunde descreşterea $p'\to p'-u\Delta t\cos\alpha$	0,5 p	
Procedând ca în primul caz analizat se obţine uşor relaţia: $p'=p\sqrt{\cos\alpha}$, unde $\cos\alpha=1/\sqrt{1+(H/f)^2}$	0,5 p	
În final găsim relaţia $p=f[\sqrt[4]{1+(H/f)^2}-1]$. Apoi, $u_\perp=v_0\sin\alpha=v_0/\sqrt{1+(f/H)^2}$	0,5 p	
Oficiu		1 p

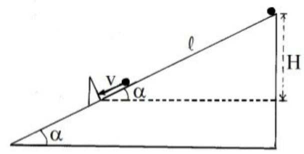
Subiect II: O combinaţie (două probleme distincte) de Fizică moleculară.	Parţial	Punctaj
Barem subiect II		**10 p**
A.Un ciclu dreptunghiular.		**5 p**
Lucrul mecanic efectuat de gaz într-un ciclu este egal cu aria din interiorul drepunghiului, adică: $L=(p_2-p_1)(V_2-V_1)=\ldots=p_1V_1[(p_2/p_1)(V_2/V_1)-V_2/V_1-p_2/p_1+1]$  	**1 p**	**5 p**
Căldura primită de gaz într-un ciclu (pe ramurile pe care temperatura creşte) este: $Q_{(+)}=\nu C_V(T_4-T_3)+\nu C_p(T_5-T_4)$, unde $C_V=3R/2$ şi $C_p=5R/2$. Astfel obţinem expresia: $Q_{(+)}=(3/2)p_1V_1(p_2/p_1-1)+(5/2)p_2V_1(V_2/V_1-1)$	**1 p**	
Ţinând cont de ecuaţia Clapeyron-Mendeleev, conform enunţului problemei putem scrie relaţiile: $\nu RT_1=(1/2)p_1(V_1+V_2)=(1/2)V_1(p_1+p_2)$,	**0,75 p**	
respectiv $\nu RT_2=(1/2)p_2(V_1+V_2)=(1/2)V_2(p_1+p_2)$.	**0,75 p**	
Raportul acestora ne dă egalităţile $T_1/T_2=p_1/p_2=V_1/V_2$ cu ajutorul cărora putem scrie $L=p_1V_1[(T_2/T_1)^2-2(T_2/T_1)+1]=(p_1V_1)(T_2/T_1-1)^2$ (*). În al doilea termen al expresiei lui $Q_{(+)}$ vom scrie că $p_2=p_1(T_2/T_1)$, şi obţinem $Q_{(+)}=(1/2)p_1V_1[5(T_2/T_1)^2-2(T_2/T_1)-3]$. Paranteza dreaptă este însă egală cu un produs de două binoame $[\ldots]=(T_2/T_1-1)[5(T_2/T_1)+3]$ şi astfel, în final, $Q_{(+)}=(1/2)(p_1V_1)[5(T_2/T_1)+3](T_2/T_1-1)$	**0,75 p**	
Randamentul ciclului termodinamic este $\eta=L/Q_{(+)}=2(T_2-T_1)/(5T_2+3T_1)$.	**0,5 p**	
În aplicaţia numerică: $\eta=2/21\approx 9{,}5\%$.	**0,25 p**	
B. Grade de libertate.		**4 p**
Analizăm mai întâi cazul în care temperatura finală T_2 a hidrogenului este doar de $79{,}99\,\mathrm{K}$ (temperatura T_2 este situată puţin sub T_0), astfel că gradele de libertate de rotaţie sunt încă îngheţate. Ţinem cont că în mişcarea de translaţie cu viteza v, energia cinetică a gazului, <u>în ansamblul său</u>, cu masa totală $m=\mu\nu$, ($\nu=$numărul total de moli, $\mu=$masa	**0,25 p**	**4 p**

molară a hidrogenului), este $(m/2)v^2$. La ciocnirea instantanee de stâncă (vasul oprindu-se brusc) putem scrie bilanţul energetic $(m/2)v^2+\nu(3R/2)T_1=\nu(3R/2)T_2$. Am ţinut cont că nu a fost atinsă temperatura $T_0=80\,\mathrm{K}$. Din acest bilanţ (scriind totuşi că $T_2\cong T_0$) găsim $v=\sqrt{(3R/\mu)(T_0-T_1)}\equiv v'\approx 611\ \mathrm{m/s}$. Dacă $v<v'$ gradele de libertate de rotaţie rămân îngheţate şi $T_2=T_1+\mu v^2/3R$ Dacă imediat după ciocnire temperatura atinsă ($T_2>T_0$) dezgheaţă gradele de libertate de rotaţie, bilanţul energetic are forma $(m/2)v^2+\nu(3R/2)T_1=\nu(5R/2)T_2$. şi $v=\sqrt{(R/\mu)(5T_0-3T_1)}\equiv v''\approx 1019\ \mathrm{m/s}$. Pentru $v>v''$ avem $T_2=(3/5)T_1+\mu v^2/5R$. Pentru valorile intermediare $v\in(v',v'')$, temperatura finală a gazului va fi $T_{fin}=T_0=80\,\mathrm{K}$.. În aplicaţiile numerice obţinem: a). $T_2=78{,}9\,\mathrm{K}$, b). $T_2=99{,}3\,\mathrm{K}$, respectiv $T_2=80\,\mathrm{K}$.	**0,5 p** **0,5 p** **0,5 p** **0,5 p** **0,5 p** **0,5 p** **0,75 p**	
Oficiu		**1 p**
Subiect III: Mecanică. Frecare neuniformă.		**10 p**
Când rondeaua coboară, legea conservării energiei ne dă $mgH=(m/2)v^2+L_f$, unde $H=\ell\sin\alpha$ şi $L_f=\overline{F_f}.\ell=\ell.[(0+k\ell G\cos\alpha)/2]$. Aici $\overline{F_f}$ este forţa de frecare medie pe distanţa parcursă (ℓ).  Astfel obţinem: $v^2=2g\ell\sin\alpha-kg\ell^2\cos\alpha$, (1). În timpul ciocnirii, modulul vitezei nu se modifică (se schimbă numai sensul vitezei) Fie ℓ' spaţiul parcurs de rondea după ciocnire, înspre vârful planului. Legea conservării	**1,5 p** **0,75 p** **0,5 p** **0,5 p**	**9 p**

energiei ne dă $(m/2)v^2 = L_f' + mgH'$, unde $H' = \ell' \sin\alpha$ **1,5 p**

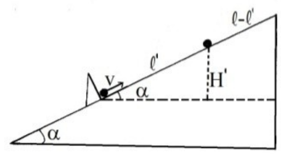
Aici L_f' este lucrul mecanic al forței de frecare pe distanța ℓ'.

El se calculează cu ajutorul forței medii de frecare:



$L_f' = \overline{F}_f'.\ell' = (1/2)\ell'[\ell + (\ell - \ell')]kG\cos\alpha = (kG/2)\ell'(2\ell - \ell')\cos\alpha.$ **1 p**

Astfel obținem $v^2 = 2g\ell'\sin\alpha + kg(2\ell\ell' - \ell'^2)\cos\alpha,$ (2) **0,5 p**



Egalând expresiile (1) și (2)

rezultă: $2\ell'\sin\alpha + k(2\ell\ell' - \ell'^2)\cos\alpha = 2\ell\sin\alpha - k\ell^2\cos\alpha$, (3) **0,75 p**

Prelucrarea relației (3). Relația (3) se poate scrie ca o ecuație de gradul al doilea în ℓ, sub forma: $A\ell^2 + B(\ell')\ell + C(\ell') = 0$, (4), unde $A = k\cos\alpha$, $B(\ell') = -2(\sin\alpha - k\ell'\cos\alpha)$ și $C(\ell') = \ell'(2\sin\alpha - k\ell'\cos\alpha)$. Pentru ca ecuația (4) să aibă <u>*soluție unică*</u> este necesar ca discriminantul său să se anuleze: $\Delta \equiv B^2(\ell') - 4A.C(\ell') = 0$. Astfel obținem ecuația $(2k^2\cos^2\alpha)\ell'^2 - (4k\sin\alpha\cos\alpha)\ell' + \sin^2\alpha = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt $\ell' = \left((\sqrt{2} \pm 1)/k\sqrt{2}\right)tg\alpha$, (5). Revenim cu aceste valori în soluția unică a ecuației (4) cu $\Delta = 0$. Obținem $\ell = -B(\ell')/2A = ... = \mp(tg\alpha)/(k\sqrt{2})$. Deoarece semnul superior nu poate fi acceptat din punct de vedere fizic (ℓ este o distanță, adică o mărime pozitivă), nici în relația (5) nu putem accepta semnul superior. Rezultă că $\ell'_{max} = \left((\sqrt{2} - 1)/k\sqrt{2}\right)tg\alpha$ și această distanță corespunde lui $\ell = (tg\alpha)/(k\sqrt{2})$. **1 p**

Soluțiile finale pentru ℓ'_{max} și ℓ **1 p**

<u>*Completare (pentru cei ce cunosc deja proprietățile derivatelor).*</u>

Din relația (3) se poate explicita dependența $\ell' = f(\ell)$. Evident ℓ' este maxim atunci când $d\ell'/d\ell = 0$. Pentru a nu explicita din (3) dependența $\ell' = f(\ell)$ (ar fi o expresie destul de complicată) derivăm direct în relația (3) în funcție de ℓ ținând cont însă că $\ell' = f(\ell)$. Apoi vom pune condiția $d\ell'/d\ell = df/d\ell = 0$. Astfel obținem $\ell' = (\sin\alpha - k\ell\cos\alpha)/(k\cos\alpha)$, (6). Revenind cu (6) în (3) găsim $\ell = (tg\alpha)/(k\sqrt{2})$, (7) și, apoi, din (6) rezultă $\ell'_{max} = \left((\sqrt{2} - 1)/k\sqrt{2}\right)tg\alpha.$

Oficiu		**1 p**

Subiecte propuse de: prof.univ.dr. Florea Uliu, Universitatea din Craiova
prof. Corina Dobrescu, Colegiul Naţional de Informatică ,,Tudor Vianu", Bucureşti
prof. Viorel Solschi, Colegiul Naţional "Mihai Eminescu", Satu Mare