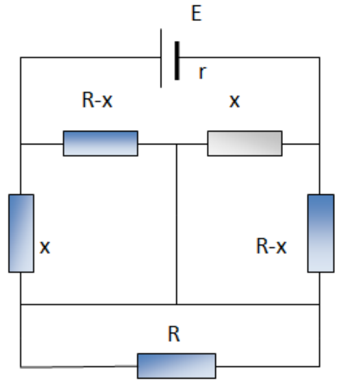
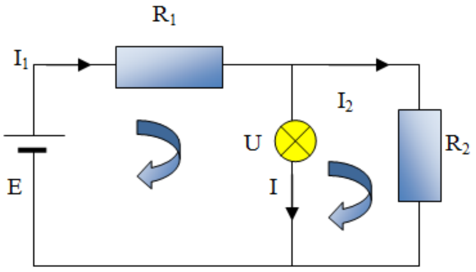
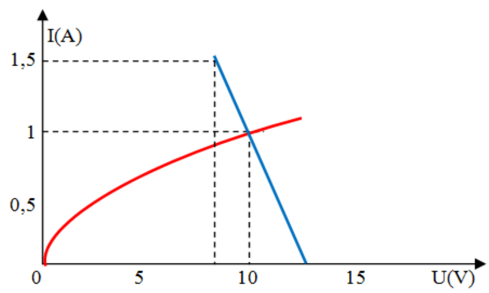
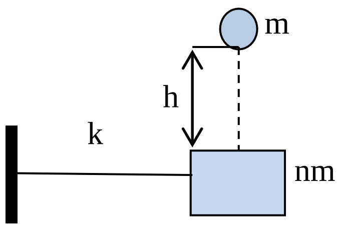
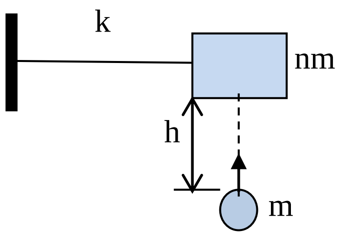
BAREM DE CORECTARE → Clasa a XI-a

Subiect I - Electrocinetică (A+B+C)	**Parțial**	**Punctaj**
Barem subiect I (A+B)		**10 puncte**
I.A. Reostate...		**5 puncte**
A.Schema echivalentă a circuitului poate fi pusă și sub forma: 	**1,50 p**	
Calculul rezistenței echivalente în funcție de poziția x a cursorului, precum și a porțiunii de circuit exterior, corespunzătoare puterii maxime din porțiunea exterioară: $\frac{1}{R_p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{R-x};R_P=\frac{x(R-x)}{R};R_E=R_S=2R_P;$ $R_E=\frac{2x(R-x)}{R};R_E=r;2=\frac{2x(10-x)}{10};x^2-10x+10=0$ $x_{1,2}=5\pm\sqrt{15}$, $x_1=8{,}87\Omega$, $x_2=1{,}12\Omega$.	**0,75 p** **1 p**	
Graficul I=f(U), permite determinarea tensiunii electromotoare E, curentului de scurtcircuit I_{SC} și rezistenței interioare r: $E=40V;I_{SC}=\frac{E}{r};r=\frac{E}{I_{SC}}=2\Omega$ $I_1=\frac{E}{R_E+r}=\frac{40}{4}=10\,A;\quad P_{\max}=R_EI^2=2\cdot10^2=200\,W$	**0,75 p**	
$R_E=\frac{2x(R-x)}{R}$, $R_E=\frac{2xR-2x^2}{R}$, valoarea maximă fiind atinsă pentru pentru $x=R/2=5\Omega$.	**0,50 p** **0,50 p**	

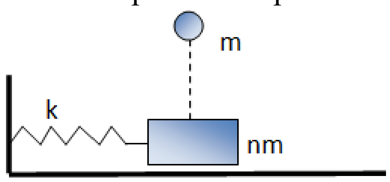
1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

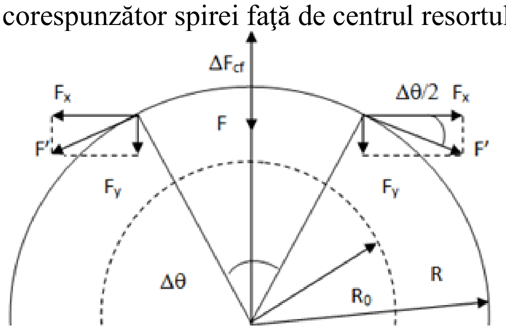
I.B. Un bec electric...		**5 puncte**
Circuitul electric are următoarea formă:  	**0,50 p**	
Aplicând legile lui Kirchhoff, obținem sistemul de ecuații: $I_1 = I + I_2;$ $E = R_1 I_1 + U;$ $R_2 I_2 - U = 0$ $E = U + (I + \frac{U}{R_2})R_1;$ $R_1 I = E - U - U.\frac{R_1}{R_2};$ $I = \frac{E_1}{R_1} - U(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2});$ $I = 5 - \frac{2U}{5};$ Rezultă o ecuație de gradul I, deci graficul este liniar.	**0,50 p** **1,50 p**	
Înlocuim numeric în SI și calculăm pentru diferite valori ale intensității curentului electric, și tensiunile corespunzătoare pe bec: $I_1 = 0A \Rightarrow U_1 = 12{,}5V;$ $I_2 = 1A \Rightarrow U_2 = 10V;$ $I_3 = 1{,}5A \Rightarrow U_3 = 8{,}75V$  Trasăm graficul peste caracteristica I=f(U) existentă pentru bec din enunțul problemei și observăm că-l intersectează corespunzător valorilor (I_2, U_2). Puterea disipată pe bec este P=UI=10W	**1 p** **1 p** **0,50 p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

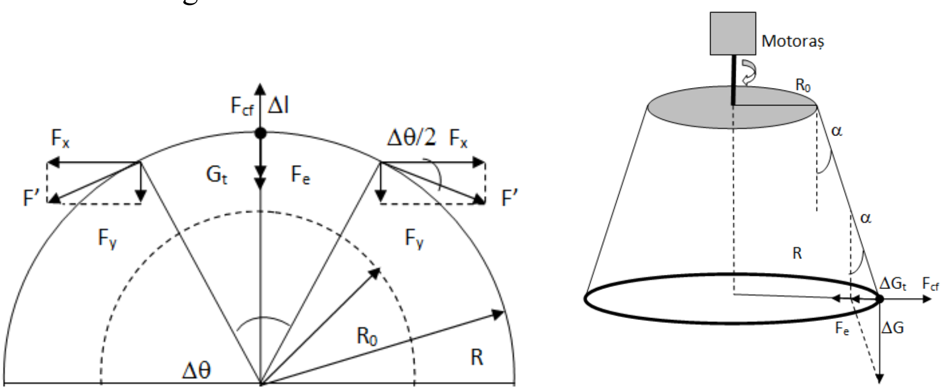
Subiect II - Diverse oscilații mecanice (A+B+C+D)		**10 puncte**
II.A. Diverse oscilații ...		**2 puncte**
Corpul cade de la înălțimea h și se ciocnește plastic cu corpul fixat pe resortul vertical  $G = F_e; mg = ky; y = \frac{mg}{k}$	**0,50 p**	
$v = \sqrt{2gh}; mv = (m+M)v_1; v_1 = \frac{mv}{m+M};$ $\frac{(m+M)v_1^2}{2} + \frac{ky^2}{2} = \frac{kA_1^2}{2};$ $A_1 = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2hk}{mg(1+n)}};$	**1 p** **0,50 p**	
II.B. Diverse oscilații ...		**2 puncte**
Corpul este aruncat de jos în sus vertical pe distanța h și atinge viteza $v=v_0/3$ în momentul ciocnirii plastice cu corpul suspendat la capătul resortului vertical:  $M = nm; v_0 = 3v; mv = (m+M)v_2; v_2 = \frac{mv}{m+M};$ Aplicăm legea conservării energiei pentru oscilațiile produse:	**0,5 p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$E_C = E_P = ct; \frac{(m+nm)v_2^2}{2} + \frac{ky^2}{2} = \frac{kA_2^2}{2};$ $\frac{(m+nm)m^2v^2}{2(m+nm)^2} + \frac{k}{2}\frac{m^2g^2}{k^2} = \frac{kA_2^2}{2}; \quad A_2 = \sqrt{\frac{m^2v^2}{k(m+nm)} + \frac{m^2v^2}{k^2}};$	**0,50 p**	
$A_2 = \frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{hk}{4mg(1+n)}};$	**0,50 p**	
Utilizând fie legile mişcării uniform încetinite, fie legea conservării energiei, calculăm viteza v în momentul ciocnirii: $\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh;\ v = \frac{\sqrt{gh}}{2};$ $A_2 = \frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{v^2\cdot k}{mg(1+n)}}; \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{4mg(1+n)+8hk}{4mg(1+n)+hk}};$	**0,50 p**	
II.C. Diverse oscilații ...		**2,5 puncte**
Resortul este așezat orizontal, are la un capăt fixat corpul, iar celălalt capăt fixat la un perete. Corpul oscilează armonic pe suprafața orizontală netedă.  În urma ciocnirii plastice, rezultă: $nmv_{max} = m(1+n)v;$ $v = \frac{nmv_{max}}{m(1+n)} = \frac{nv_{max}}{1+n};$ $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{nm}{k}};$ $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m(1+n)}{k}};$	**1 p**	

$v=\dfrac{nm\dfrac{2\pi}{T_1}A_1}{m(1+n)}=\dfrac{2\pi}{T_2}A_2;$ $\dfrac{nmA_1}{T_1 m(1+n)}=\dfrac{A_2}{T_2};$ $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{m(1+n)\sqrt{nm}}{nm\sqrt{m(1+n)}};\dfrac{A_1}{A_2}=\sqrt{\dfrac{1+n}{n}};$	**1 p** **0,50 p**	
II.D. Diverse oscilaţii ...	**2 puncte**	**3,5 puncte**
a.) Considerăm un element de masă Δm ca masă a unei spire din resort şi Δθ unghiul corespunzător spirei faţă de centrul resortului circular. 	**0,25 p**	
În cursul rotaţiei forţa centrifugă corespunzătoare unei spire este: $\Delta F_{cf}=\Delta m\cdot 4\pi^2\nu_1^2R_1;$ $\Delta F_{cf}=F=2F_y;$ $\dfrac{F_y}{F'}=\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}\cong\dfrac{\Delta\theta}{2};$	**0,25 p**	
$F'\Delta\theta=\Delta m\cdot 4\pi^2\nu_1^2R_1;F'=4\pi^2\nu_1^2R_1\dfrac{\Delta m}{\Delta\theta};$	**0,50 p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Raportăm masa unei spire Δm şi masa resortului întreg la unghiurile corespunzătoare: $\frac{\Delta m}{\Delta\theta}=\frac{m}{2\pi};F'=\frac{m4\pi^2\nu_1^2R_1}{2\pi};F'=F_e;$ $F_e=k\Delta l=2\pi k(R_1-R_0);$ $\frac{m4\pi^2\nu_1^2R_1}{2\pi}=2\pi k(R_1-R_0);$ $R_1=\frac{4\pi^2kR_0}{4\pi^2k-m\cdot 4\pi^2\nu_1^2}=\frac{kR_0}{k-m\nu_1^2};$ $\frac{\Delta l}{l_0}=\frac{2\pi\Delta R}{2\pi R_0}=\frac{m4\pi^2\nu_1^2}{4\pi^2k-m4\pi^2\nu_1^2};\frac{\Delta l}{l_0}=\frac{m\nu_1^2}{k-m\nu_1^2}$	**1 p**	
	1,5 puncte	
b.) În cazul firelor mai scurte şi frecvenței mărite, firele se înclină față de verticală cu unghiul α. 	**0,25 p**	
Utilizând criterii similare de lucru ca în punctul anterior, putem stabilii în baza criteriilor comune relațiile corespunzătoare: $F_{cf}=F_e+G_t;\Delta G_t=\Delta mg.tg\alpha;$ $\Delta m4\pi^2\nu_2^2R_2=k.2\pi(R_2-R_0)\Delta\theta+\Delta mgtg\alpha;$	**0,25 p**	
$\frac{\Delta m}{\Delta\theta}(4\pi^2\nu_2^2R_2-g.tg\alpha)-k.2\pi(R_2-R_0);$ $\frac{m}{2\pi}4\pi^2\nu_2^2R_2=\frac{m}{2\pi}g.tg\alpha+2k\pi R_2-2k\pi R_0$	**0,50 p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$R_2=\frac{mg.tg\alpha-4\pi^2kR_0}{m4\pi^2v_2^2-4\pi^2k}; R_2=\frac{mg.tg\alpha-4\pi^2kR_0}{4\pi^2(v_2^2m-k)}$.	**0,50 p**	
Problema III … Oscilații mecanice armonice – (A + B)		**10 puncte**
III.A. … Oscilații mecanice amortizate		**4 puncte**
a) Din definiția vitezei oscilatorului : $\mathrm{v}=\frac{dx}{dt}=\alpha\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_0+\beta)$ obținem: $\alpha=-A_0\cdot\omega_0$ și $\beta=\arcsin\frac{\delta}{\omega_0}$ b) $E(t)=E_{cin}+E_{pot}=\frac{1}{2}k\cdot A_0^2e^{-2\delta t}\left[\sin^2(\omega t+\varphi_0+\beta)+\cos^2(\omega t+\varphi_0)\right]$, iar $E_{dis.,T}=E(t)-E(t+T)$. Paranteza pătrată ia aceeași valoare și după o perioadă T, de unde $Q=2\pi\cdot\frac{e^{-2\delta t}}{e^{-2\delta t}-e^{-2\delta(t+T)}}=2\pi\cdot\frac{1}{1-e^{-2\delta T}}$. c) $D=\delta\cdot T$, de unde $D=\frac{1}{2}\ln 2\cong 0{,}347$.	**1,5 p** **0,75 p** **0,75 p** **1 p**	
III.B. Oscilații mecanice ideale		**6 puncte**
REZOLVARE 1: **Metoda energetică**. Energia potențială a unui oscilator mecanic variază în funcție de elongația / coordonata y oscilatorului, ca o funcție $E_p=f(y)$. În aceste fel perioada unei mișcări oscilatorii armonice este dată de relația: $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{E_p''}}$ (1), unde E_p'' este derivata de ordinul doi a energiei potențiale $E_p''=f''(y)$ .Cum demonstrăm această relație (1)?. Deoarece suntem în cazul ideal când asupra oscilatorului acționează forțe conservative, forța de revenire ce acționează asupra oscilatorului este prima derivată a funcției energie potențială $E_p=f(y)$ luată cu semnul minus (-) în raport cu coordonata y, adică $F(y)=-\frac{dE_p}{dy}=-E_p'(y)$ (2) . În poziția de echilibru /centrul de oscilație, forța de revenire este întotdeauna nulă și deci $\frac{dE_p}{dy}=0=E'_p(y)$ în poziția de echilibru. Orice funcție continuă și derivabilă, pentru o modificare mică a variabilei y cu o cantitate Δy, se poate scrie într-o primă aproximație (de ordinul I) ca fiind:	**0,50 p** **0,50 p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$f(y+\Delta y)\approx f(y)+\dfrac{df}{dy}\cdot\Delta y$ (3) . Deci în jurul poziției de echilibru y_0 forța de revenire, depinde de deplasarea până la poziția de echilibru (y_0) printr-o relație :

$F(y_0+s)=F(y_0)+\left.\dfrac{dF}{dy}\right|_{y=y_0}\cdot s$. Dar în poziția de echilibru $F(y_0)=0$ și — **0,50 p**

deci $F(y)=-\dfrac{dE_p}{dy}=-E_p{}'(y)$ (5). Rezultă că :

$F(y_0+s)=0-E_p{}''(y_0)\cdot s=m\cdot a=m\dfrac{d^2s}{dt^2}$ (6) . A rezultat o ecuație diferențială de ordinul 2, pentru o mișcare armonică simplă de forma: $\dfrac{d^2s}{dt^2}=-\dfrac{E_p{}''(y_0)}{m}\cdot s$, care comparată cu ecuația standard a mișcării — **0,50 p**

oscilatorii armonice ideale (în lipsa frecărilor) $\dfrac{d^2s}{dt^2}=-\omega^2\cdot s$, obținem:

$\omega=\sqrt{\dfrac{E_p{}''(y_0)}{m}}$, deci $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{E_p{}''}}$ (8). Revenim la problema noastră. — **0,50 p**

Energia potențială a oscilatorului va fi suma dintre energia potențială gravitațională și energia potențială elastică stocată prin comprimare în resortul dintre balamalele **B** și **D** / diagonala **BD** a rombului. Am luat nivelul de referință pentru energia potențială gravitațională la nivelul balamalei superioare **A**.

$E_p(y)=-m\cdot g\cdot y+\dfrac{k}{2}[1{,}5\cdot l-2(y/2)\cdot tg\alpha]^2$ (9). De asemenea:

$tg\alpha=\dfrac{\sqrt{\ell^2-(y/2)^2}}{y/2}=\dfrac{\sqrt{4\cdot\ell^2-y^2}}{y}$ (10). Utilizând relația (10) în (9) obținem: — **0,50 p**

$E_p(y)=-m\cdot g\cdot y+\dfrac{k}{2}\cdot\left[\dfrac{9}{4}\cdot\ell^2+4\ell^2-y^2-3\ell\sqrt{4\cdot\ell^2-y^2}\right]$ (11). Vom — **0,50 p**

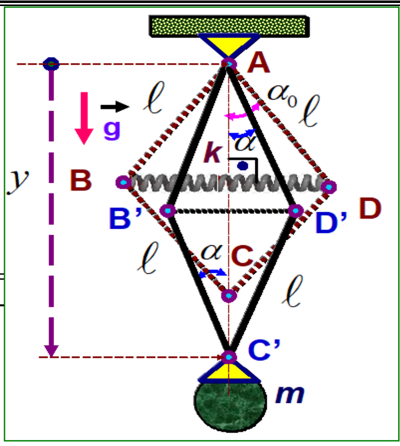
diferenția energia potențială în raport cu y, o vom egala cu zero și vom rezolva ecuația $\dfrac{dE_p}{dy}=0$ când $y=2\cdot\ell\cdot\cos 30^0$ (12). Rezultă :

$E_p{}'(y)=-mg+\dfrac{k}{2}\left(-2y+\dfrac{3\ell y}{\sqrt{4\ell^2-y^2}}\right)=0$ (13). Din (12) și (13) obținem — **0,50 p**

valoarea masei m, agățate la balamaua C / masa oscilatorului:

$m = \frac{\sqrt{3} \cdot k\ell}{2g}$ (14).

Diferențiând relația (13) / membrul stâng, sau mai diferențiem încă o dată energia potențială a sistemului fizic:



$E_p''(y) = \frac{k}{2}\left(-2 + \frac{3\ell y^2}{(4\ell^2 - y^2)^{3/2}} + \frac{3\ell}{\sqrt{4\ell^2 -}}\right.$

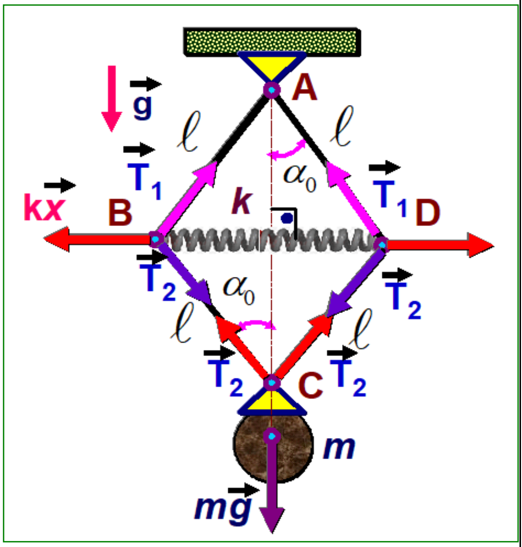
(15). Utilizând relația $y = 2 \cdot \ell \cdot \cos 30^0$ în (15), obținem: $E_p'' = 5k$ (16). În final rezultă:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{5k}} \overset{(rel.14)}{=} 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}\cdot\ell}{10g}}$.

0,50 p | **0,50 p** | **0,50 p** | **0,50 p**

III.B. Oscilații mecanice ideale — **6 puncte**

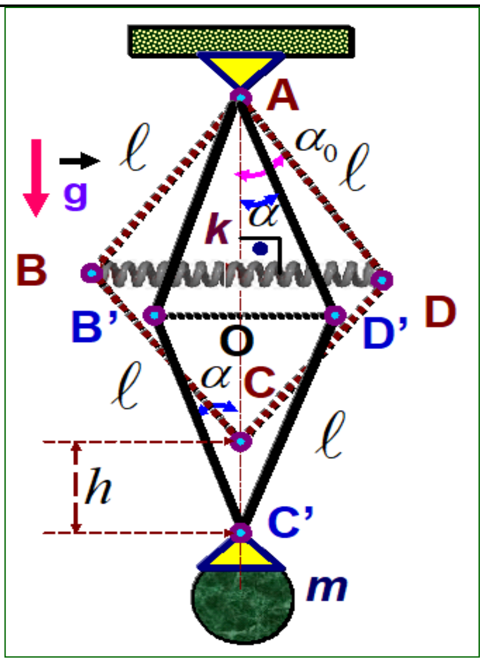
*** Altă variantă de rezolvare:** **Metoda clasică**. Resortul este comprimat în poziția de echilibru cu: $x = \Delta l = 1{,}5 \cdot \ell - \ell = \ell/2$ (1). **0,25 p**



Notăm cu $\vec{T}_1$ tensiunea mecanică în tijele **BA** și **DA**, respectiv cu $\vec{T}_2$ tensiunea mecanică în tijele **BC** și **DC**. Din condiția de echilibru $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + k\vec{x} = 0$ (2) în articulațiile / punctele **B** sau **D**, obținem că: $T_1 = T_2 = T_0$ (3) (proiectată pe verticală), deci în toate cele 4 tije avem aceeași **0,50 p**

tensiune mecanică T, respectiv $kx = 2T_0 \cdot \sin\alpha_0 = k \cdot \frac{\ell}{2}$ (4) (proiectată pe orizontală). **0,50 p** Condiția de echilibru în punctul **C**, scrisă pe verticală este: $2T_0 \cdot \cos\alpha_0 = mg$ (5). Din (4) și (5) obținem: $tg\alpha_0 = \frac{k\ell}{2mg} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; **0,75 p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.



Când scoatem corpul de masă m din poziția de echilibru, trăgând vertical în jos pe distanța h , diagonala mare a rombului are lungimea $(2\ell\cdot\cos\alpha+h)$. **0,50 p**

Notăm cu $y=AO$, $x=OD'$ lungimile catetelor triunghiului dreptunghic $\Delta AOD'$ și conform teoremei lui Pitagora avem: $y^2+x^2=\ell^2$, care prin diferențiere devine: **0,50 p**

$2y\cdot\Delta y+2x\cdot\Delta x=0$. Dar

$y=\ell\cdot\cos 30^0$, $y=\ell\cdot\sin 30^0$, de unde **0,50 p**

obținem: $\Delta x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot h$, iar resortului se va comprima cu : $h\sqrt{3}$, forța elastică în resort fiind: $F_e=k\cdot h\sqrt{3}$ **0,75 p**

(6). Condiția de echilibru a punctului B (sau D) în această poziție este:

$\vec{T}_1+\vec{T}_2+k\vec{x}=0$, $2T\sin\alpha=k\cdot h\sqrt{3}$ (7)($\rightarrow$ proiectată pe direcție orizontală) și $T_1=T_2=T$ (8) ($\rightarrow$ proiectată pe verticală). Prin diferențiere obținem: **0,50 p**

$\Delta(2T\cdot\sin\alpha)=k\cdot h\sqrt{3}$; $2(\Delta T\cdot\sin\alpha_0+T_0\cdot\cos\alpha_0\cdot\Delta\alpha)=k\cdot h\sqrt{3}$;

$y=\ell\cdot\cos\alpha$; $\Delta y=-\ell\cdot\sin\alpha_0\cdot\Delta\alpha$, de unde: $\Delta\alpha=-\frac{\Delta y}{\ell\cdot\sin\alpha_0}=\frac{-h/2}{\ell\cdot 1/2}=-\frac{h}{\ell}$; **0,75 p**

$\frac{h}{2}=(\ell\cdot\Delta\alpha)\cdot\sin\alpha$. Variația tensiunii în tije devine: $\Delta T=\frac{3mgh}{\ell}$. Forța de revenire spre poziția de echilibru este

$F_{rev.}=\Delta(2T\cdot\cos\alpha)=2(\Delta T\cdot\cos\alpha_0-T_0\cdot\sin\alpha_0\cdot\Delta\alpha)=$ **0,50 p**

$$=2\left(\frac{3mgh}{\ell}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{mg}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-h}{\ell}\right)=\frac{mgh}{\ell}\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}=K_{echiv}\cdot h$$

Perioada micilor oscilații va fi:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{echiv.}}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{10mg/\sqrt{3}}}=2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}\cdot\ell}{10g}}.$$ **0,50 p**

Barem propus de:

prof. **GHERGU** Cezar, Colegiul Național “ Neagoe Basarab ”, Oltenița;
prof. **ANTONIE** Dumitru, Colegiul Tehnic nr. 2, Târgu – Jiu.

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.