Subiectul I: **(10 puncte)**

Circuite oscilante

Vă propunem să studiați comportarea unor circuite electrice în regim oscilant. În analiza pe care o veți face este posibil să întâlniți ecuații de forma $\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0$ numite ecuații diferențiale omogene, unde a și b sunt constante reale, iar $\frac{d^2y}{dt^2}$ și $\frac{dy}{dt}$ reprezintă a doua, respectiv, prima derivată în raport cu timpul a funcției $y = f(t)$. Primul pas în rezolvarea lor îl constituie substituirea $y(t) = Ae^{ct}$, urmată de rezolvarea ecuației de gradul doi (caracteristice) în necunoscuta c. Dacă soluțiile sunt complex conjugate, atunci soluția generală a ecuației diferențiale este de forma $y(t) = e^{-\frac{a}{2}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$, unde $\omega = \sqrt{\Delta}$, iar $A\ și\ B$ sunt constante ce urmează a fi determinate din condiții fizice.

A. Circuitul electric a cărui schemă este ilustrată în figura 1, este format dintr-o bobină ideală, cu inductanța L și un condensator plan, ideal, cu capacitatea C, așa cum este ilustrat figura 1. Bobina ideală este de tip solenoid cu lungimea ℓ și N spire, distanța dintre armăturile condensatorului este d , iar aria suprafeței comune a armăturilor este S. Inițial circuitul este deschis, iar condensatorul este încărcat cu sarcina electrică q_0. Apoi, la momentul $t_0 = 0$ întrerupătorul se închide și rămâne închis.

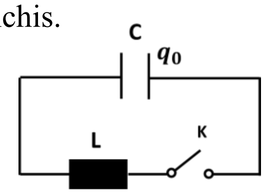


fig. 1

a1. Scrieți legile lui Kirchhoff pentru circuitul din fig.1 și determinați expresiile sarcinii electrice momentane și intensității momentane a curentului din circuit, ca funcții de timp;

a2. Determinați expresiile matematice ce redau dependența de timp pentru:
- intensitatea câmpului electric dintre armăturile condensatorului plan,
- densitatea volumică de energie electrică,
- inducția câmpului magnetic produs la trecerea curentului prin bobină,
- densitatea volumică de energie magnetică;

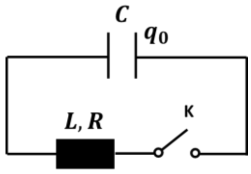


fig. 2

a3. Considerați acum că bobina este reală și are rezistența electrică R, astfel încât $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Inițial circuitul este deschis, iar condensatorul este încărcat cu sarcina electrică q_0, ca în figura 2. Apoi, la momentul $t_0 = 0$ întrerupătorul se închide și rămâne închis.

Determinați expresia sarcinii electrice momentane de pe condensator și schițați graficul variației în timp a acesteia;

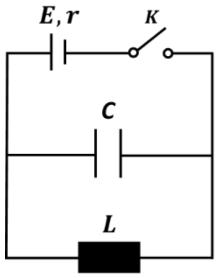


fig. 3

B. Circuitul electric a cărui schemă este ilustrată în figura 3, este format dintr-o bobină ideală cu inductanța L, un condensator plan, ideal, cu capacitatea C și o sursă electrică de curent continuu având tensiunea electromotoare E și rezistența electrică internă r. Inițial întrerupătorul K este închis. Apoi, la momentul $t_0 = 0$ întrerupătorul se deschide și rămâne deschis.

b1. Determinați expresia matematică a tensiunii electrice de la bornele condensatorului C, în funcție de timp;

b2. În timpul oscilațiilor, la momentul $t' = nT + T/4$, se dublează instantaneu distanța dintre armăturile condensatorului (T reprezintă perioada oscilațiilor electromagnetice libere din circuit, iar n este un număr întreg pozitiv). Determinați expresia matematică a intensității curentului electric din circuitul LC, în funcție de timp, pentru $t > t'$;

C. Circuitul electric a cărui schemă este ilustrată în figura 4, este format dintr-un condensator ideal cu capacitatea C și două bobine ideale cu inductanțele L_1 și L_2. Inițial ambele întrerupătoare sunt deschise, iar condensatorul este încărcat cu sarcina electrică q_0. La momentul $t_0 = 0$ întrerupătorul k_1 se închide și rămâne închis.

c1. Determinați expresiile intensității maxime a curentului prin bobina L_1 și a primului moment de timp la care această intensitate devine maximă;

c2. La momentul de timp determinat la punctul precedent (c1) se închide și întrerupătorul k_2. Determinați expresia sarcinii maxime de pe armăturile condensatorului, în aceste condiții.

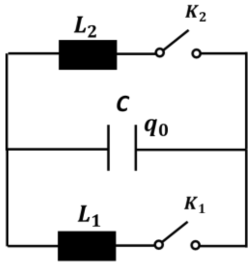


fig. 4

Subiectul II: **(10 puncte)**

Coborârea relativistă a tijei

În raport cu un sistem de referință inerțial, R, solidar cu solul orizontal terestru, o tijă liniară AB, cu lungimea proprie L, coboară uniform pe direcție verticală, așa cum indică desenul din figura 1, având viteza constantă, v. În timpul coborârii sale, tija este privită de un observator, aflat pe un cărucior (sistem inerțial mobil, R'), care se deplasează rectiliniu și uniform față de R cu viteza u. La momentul inițial, $t = t' = 0$, originile celor două sisteme de referință coincid.

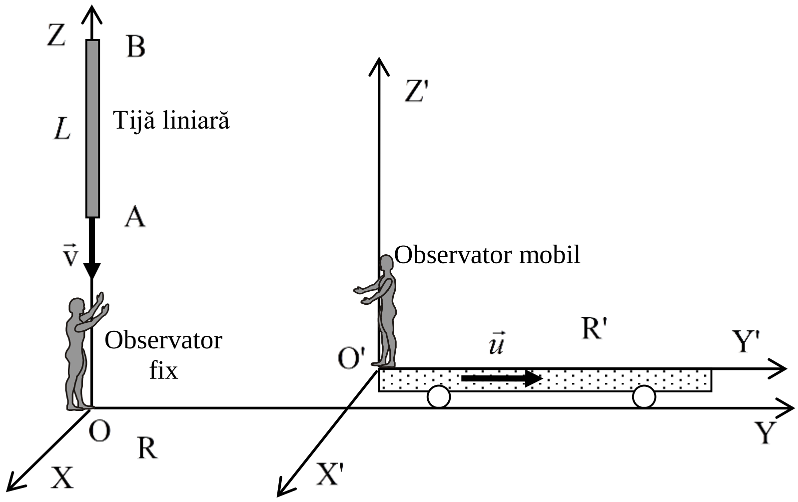


Fig. 1

a) *Să se determine*: **1)** lungimea tijei, L', și viteza tijei în raport cu observatorul O' de pe cărucior, v'_{tija}; **2)** direcția coborârii acesteia față de verticală, φ, apreciată de același observator. Se cunoaște c – viteza luminii în vid. *Caz particular*: $\text{v} \ll c$; $u \ll c$.

b) Tija AB, în poziție orizontală, paralelă cu solul terestru, coboară uniform pe verticală, cu aceeași viteză v, astfel încât capătul A rămâne permanent pe axa OZ, așa cum indică desenul din figura 2.

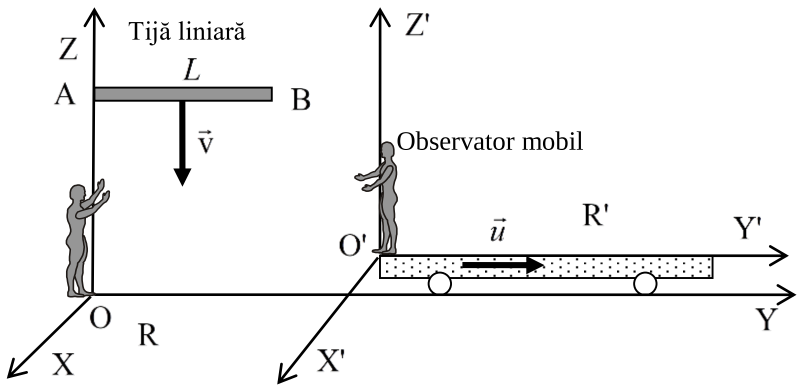


Fig. 2

Știind că observatorul din sistemul R' înregistrează un interval de timp τ' între momentele când capetele A și B ale tijei ating solul orizontal, *să se determine*: **1)** viteza u a sistemului mobil în raport cu sistemul fix; **2)** distanța D' dintre punctele de pe sol, unde capetele A și B ale tijei ating solul orizontal, în raport cu observatorul din sistemul mobil (*caz particular*, $u << c$).

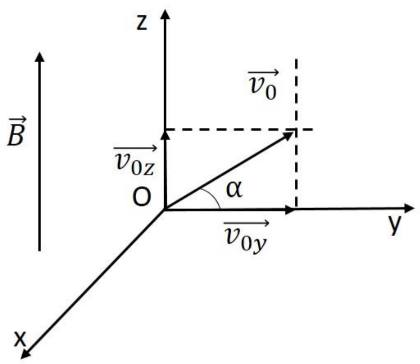
Aplicație numerică: $L = 1{,}50\,\text{m}$; $\tau' = 10^{-9}$ s.

c) *Să se determine* unghiul θ' sub care tija atinge solul orizontal, în raport cu observatorul O' din sistemul R'. *Caz particular*: $\text{v} << c$; $u << c$.

Subiectul III: **(10 puncte)**

Particule în câmp magnetic și în câmp electric

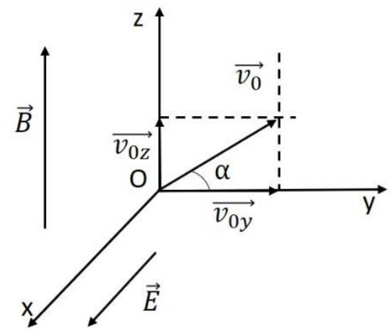
A. O particulă cu sarcina electrică pozitivă $+q$ și masa m pătrunde cu viteza $\overrightarrow{v_0}(0, v_{0y}, v_{0z})$, prin originea O a sistemului de axe de coordonate, într-un câmp magnetic uniform, de inducție $\vec{B}(0,0,B)$ orientat după axa Oz.



a1. Scrie ecuațiile de mișcare, legile vitezelor și legile de mișcare după fiecare dintre cele trei axe.

a2. Dedu ecuația proiecției traiectoriei în planul xOy. Descrie calitativ forma traiectoriei. Schițează traiectoria particulei.

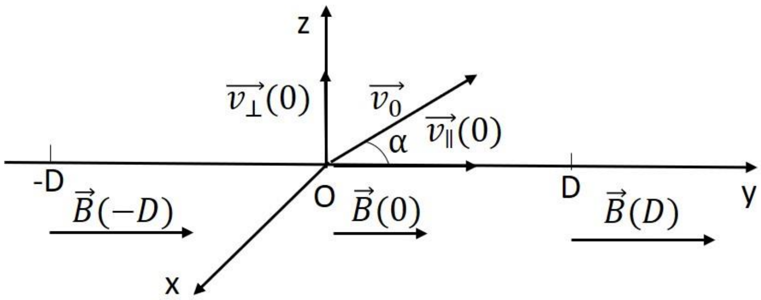
B. În acest caz vom considera că asupra aceleiași particule acționează și un câmp electric uniform, orientat paralel cu axa Ox, $\vec{E}(\text{E},0,0)$.



b1. Scrie ecuațiile de mișcare, legile vitezelor și legile de mișcare după fiecare dintre cele trei axe.

b2. Dedu ecuația proiecției traiectoriei în planul xOy. Descrie calitativ forma traiectoriei. Schițează traiectoria particulei.

C. O particulă cu sarcina electrică pozitivă $+q$ se deplasează într-un câmp magnetic a cărui inducție magnetică este orientată paralel cu axa Oy și crește foarte lent de-a lungul axei, atât în sensul negativ cât și în sensul pozitiv al acesteia. Inducția magnetică este minimă în planul xOz (corespunzător coordonatei $y = 0$). Inițial particula se găsește în planul xOz (corespunzător coordonatei $y = 0$) și se deplasează cu o viteză $\overrightarrow{v_0}$ care face unghiul α cu direcția axei Oy. Vectorul viteză inițială are o componentă orientată de-a lungul axei Oy, $v_{\parallel}(0) = v_0 cos\alpha$ și o componentă perpendiculară pe aceasta, $v_{\perp}(0) = v_0 sin\alpha$.



Deoarece inducția câmpului magnetic se modifică foarte lent, vom face următoarea aproximație: forța exercitată de câmpul magnetic asupra particulei este tot timpul orientată spre centrul momentan al mișcării de rotație al acesteia în jurul linei de câmp față de care se deplasează. În aceste condiții admitem că pe parcursul mișcării:

- energia cinetică a particulei rămâne constantă;
- momentul cinetic al particulei față de centrul momentan de rotație rămâne constant

În originea axei Oy inducția magnetică este $B(0)$, iar la o distanță D de-a lungul axei Oy, în sensul pozitiv sau negativ al acesteia, $B(D) = B(-D) > B(0)$.

Determină valorile unghiului α pentru care particula nu poate depăși punctele de coordonate $\pm D$ de-a lungul axei Oy.

Subiecte propuse de:
prof. Florin BUTUȘINĂ – Colegiul Național ”Simion Bărnuțiu”, *Șimleu-Silvaniei*
prof. Constantin GAVRILĂ – Colegiul Național ”Sfântul Sava”, *București*
prof. dr. Mihail SANDU – Liceul Tehnologic de Turism, *Călimănești*
***prof. Viorel SOLSCHI**, Colegiul Național „Mihai Eminescu” – Satu Mare*