Subiectul I: rezolvare și barem

Soluție A: (4p)

a1. (1p) Legea a II a lui Kirchhoff pentru ochiul format, în mărimi momentane, are forma:

$$-L\frac{di}{dt} = \frac{1}{C}q \text{ sau } \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații este:

$$q(t) = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

La momentul inițial sarcina electrică de pe armături este maximă, $q(0) = q_0$ astfel că $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ și soluția scrisă anterior devine:

$$q(t) = q_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right). \text{ (0,5p)}$$

Intensitatea curentului din circuit se obține din legea de variație a sarcinii electrice:

$$i(t) = \frac{dq}{dt},$$

iar de aici ajungem la:

$$i(t) = -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

Soluția finală va fi:

$$i(t) = -q_0 \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right). \text{ (0,5p)}$$

a2. (1p) Intensitatea câmpului electric dintre armăturile condensatorului va fi:

$$E(t) = \frac{1}{d}u(t),$$

sau $E(t) = E_{max} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$ (0,25p), unde $E_{max} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}q_0$,

iar densitatea volumică de energie electrică:

$$w_e(t) = \frac{W_e(t)}{V}, \text{ unde } W_e = \frac{1}{2C}q^2(t).$$

În final

$$w_e(t) = \frac{\varepsilon_0}{2}E_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t).$$

$$w_e(t) = \frac{q_0^2}{2\varepsilon_0 S}\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) \text{ (0,25p)}$$

Inducția câmpului magnetic produs la trecerea curentului prin bobină are expresia

$$B(t) = \frac{\mu_0 N}{l}i(t), \text{ (0,25p)}$$

sau $B(t) = -B_{max}\sin(\omega_0 t)$, unde $B_{max} = \frac{\mu_0 N}{l}q_0\omega_0$,

iar densitatea volumică de energie magnetică:

$$w_m(t) = \frac{W_m(t)}{V}, \text{ unde } W_m(t) = \frac{L}{2}i^2(t).$$

În final

$$w_m(t) = \frac{1}{2\mu_0}B_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

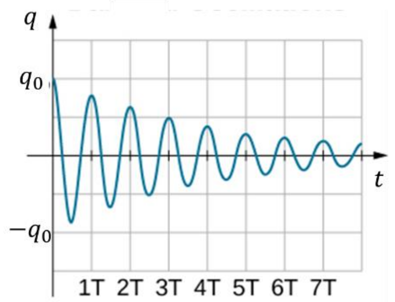
$$w_m(t) = \frac{q_0^2}{2\varepsilon_0 S}\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) \text{ (0,25p)}$$

a3. (2p) Legea a II a lui Kirchhoff pentru ochiul format, în mărimi momentane, are forma:

$-L\frac{di}{dt} = \frac{1}{C}q + Ri$ sau $\ddot{q} + a\dot{q} + bq = 0$, unde $a = \frac{R}{L}$, iar $b = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Soluția finală, conform indicațiilor este

$q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t)$, unde $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$. (1p)

Reprezentarea grafică cerută este prezentată în figura alăturată. (1p)



Soluție B: (3p)
b1. (1p) Inițial, când întrerupătorul K este închis, bobina scurcircuitează atât sursa cât și condensatorul. Intensitatea curentului care parcurge bobina este dată de relația :

$$I_0 = \frac{E}{r} = I_{max} \text{ (0,2p)}$$

După deschiderea întrerupătorului are loc încărcarea condensatorului (*transfer energetic de la bobină la condensator*), respectiv în circuitul LC apar oscilații electromagnetice libere cu pulsația $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (0,2p)
Legea conservării energiei:

$$W_0 = \frac{LE^2}{2r^2} = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_{max}^2}{2} \text{ (0,2p)}$$

conduce la :

$$U_{max} = \frac{E}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ (0,1p)}$$

Expresia matematică a tensiunii electrice de la bornele condensatorului C, în funcție de timp:

$$u = U_{max}\, sin\omega t = \frac{E}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\, sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) \text{ (0,3p)}$$

b2. (2p) La momentul $t' = nT + T/4$, condensatorul este încărcat la maximum, iar curentul din circuit este nul, $u = U_{max}$ și $i = 0$. (0,3p)
Dublarea distanței dintre armături duce la scăderea capacității $C' = \frac{C}{2}$. (0,2p)
La depărtarea armăturilor sarcina electrică de pe armături nu se modifică, iar lucrul mecanic efectuat pentru depărtarea armăturilor duce în final la creșterea tensiunii de la bornele condensatorului:

$$q_{max} = CU_{max} = C'U'_{max} \Rightarrow U'_{max} = 2U_{max} \text{ (0,3p)}$$

În timpul noilor oscilații energia se conservă:

$$\frac{1}{2}C'U'^2_{max} = \frac{1}{2}LI'^2_{max} \text{ (0,3p)}$$

Valoarea maximă a intensității curentului electric $I'_{max} = \sqrt{2}\frac{E}{r}$ (0,2p)

Pulsația noilor oscilații electromagnetice va fi : $\omega' = \sqrt{\frac{2}{LC}}$. (0,3p)

La momentul $t = t'$, $i' = 0$. Pentru $t > t'$ intensitatea curentului electric din circuitul LC are forma:

$$i = I'_{max}\, sin\omega'(t - t') = \sqrt{2}\frac{E}{r}\, sin\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}(t - t')\right) \text{ (0,4p).}$$

Soluție C: (3p)
c1. (1p) În circuit apar oscilații electromagnetice libere și în consecință

$$W_{e,max} = W_{m,max}. \text{ (0,25p)}$$

Având în vedere că

$$\begin{cases} W_{e,max} = \frac{q_0^2}{2C} \\ W_{m,max} = \frac{L_1}{2}I_{max}^2 \end{cases} \text{ (0,25p)}$$

Rezultă $I_{max} = \frac{q_0}{\sqrt{L_1C}}$ (0,25p), valoarea care, conform ecuației $i(t) = I_{max}\sin(\omega_0 t)$, se atinge la $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{L_1C}$ (0,25p).
c2. (2p) Aplicând legile lui Kirchhoff obținem:

$$\begin{cases} i_1 = i_C + i_2 \quad (1) \\ -L_1\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{C}q \quad (2) \\ -L_1\frac{di_1}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt} = 0 \quad (3) \end{cases} \text{ (0,3p).}$$

Din ecuația (3) rezultă că

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{L_1}{L_2}\frac{di_1}{dt} \text{ (4),}$$

iar din (1) și (4)

$$\frac{di_C}{dt} = \frac{L_1+L_2}{L_2}\frac{di_1}{dt} \text{ (5).}$$

Ecuațiile (5) și (2) conduc la

$$-\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}\frac{di_C}{dt}=\frac{q}{C}.$$

Soluția acestei ecuații este:

$$q(t)=q_{max}\sin(\omega_1 t+\varphi_0),\ (0{,}7\text{p})\ \text{unde}\ \omega_1^2=\frac{1}{C\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}}=\frac{1}{CL_e}.$$

În momentul închiderii întrerupătorului, considerat mai departe $t=0$, condensatorul era complet descărcat, iar curentul prin condensatorul C avea intensitate maximă.
Deoarece $q(0)=0$, rezultă că $\varphi_0=0$, respectiv $q(t)=q_{max}\sin(\omega_1 t)$.
Intensitatea curentului prin condensator este

$$i_C(t)=\omega_1 q_{max}\cos(\omega_1 t)\ (6).$$

Folosindu-ne de ec. (6) obținem pentru momentul $t=0$

$$I_{C,max}=\omega_1 q_{max}\quad (0{,}5\text{p})$$

Având în vedere rezultatul de la subpunctul c1, din condiția $I_{C,max}=I_{max}$, rezultă că:

$$\omega_0 q_0=\omega_1 q_{max}$$

de unde

$$q_{max}=q_0\sqrt{\frac{L_2}{L_1+L_2}}.\ (0{,}5\text{p})$$

Observație: *la același rezultat se poate ajunge presupunând că la închiderea celui de-al doilea întrerupător se formează un nou circuit oscilat compus din condensator și o bobină echivalentă cu o grupare în paralel a bobinelor cu inductanțele L_1și L_2.*

Subiectul II: rezolvare și barem

Rezolvare

a) 3,00 puncte

1) 1,25 puncte

În acord cu notațiile din figura 3, relațiile dintre coordonatele de poziție ale unui punct material P, raportate la cele două sisteme de referință inerțiale, R și respectiv R', reprezentate de transformările Lorentz speciale, sunt:

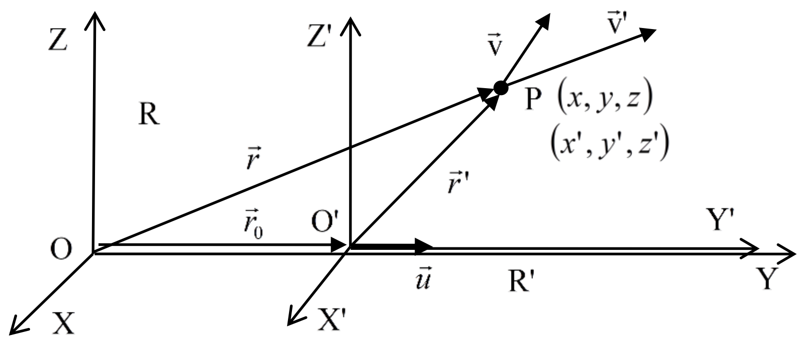


Fig. 3

$$x'=x;\ y'=\frac{y-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\ z'=z;\ t'=\frac{t-\frac{u}{c^2}y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

La momentul t, coordonatele de poziție ale extremităților A și B ale tijei, în raport cu sistemul de referință inerțial R, sunt:

$$\text{A: } x_A=0;\ y_A=0;\ z_A=h-\text{v}t;$$
$$\text{B: } x_B=0;\ y_B=0;\ z_B=h+L-\text{v}t,$$

unde h este distanța inițială dintre capătul A al tijei și solul orizontal.

În același moment, coordonatele acelorași două extremități, în raport cu sietemul inerțial R', sunt:

$$\text{A: } x'_{\text{A}}=0;\; y'_{\text{A}}=\frac{y_{\text{A}}-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{0-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\; z'_{\text{A}}=h-ut;$$

$$\text{B: } x'_{\text{B}}=0;\; y'_{\text{B}}=\frac{y_{\text{B}}-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{0-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\; z'_{\text{B}}=L+h-ut.$$

În aceste condiții, deoarece momentului t din sistemul R îi corespunde momentul t' din sistemul R', având în vedere că:

$$t'=\frac{t-\frac{\text{v}_0}{c^2}y}{\sqrt{1-\frac{\text{v}_0^2}{c^2}}};\;\; \text{v}_0=u,$$

pentru coordonatele capetelor A și B ale tijei, în raport cu sistemul R', la momentul t', rezultă:

$$t'=\frac{t-\frac{u}{c^2}y_{\text{A/B}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{t-0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$

$$t=t'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}};$$

$$\textbf{A: } x'_{\text{A}}=0;\; y'_{\text{A}}=\frac{-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=-ut';\; z'_{\text{A}}=h-\text{v}t=h-\text{v}t'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}};$$

$$\textbf{B: } x'_{\text{B}}=0;\; y'_{\text{B}}=\frac{-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=-ut';\; z'_{\text{B}}=L+h-\text{v}t=L+h-\text{v}t'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}.$$

Ca urmare, lungimea tijei, apreciată de observatorul din sistemul R', este:

$$L'=\sqrt{\left(x'_{\text{B}}-x'_{\text{A}}\right)^2+\left(y'_{\text{B}}-y'_{\text{A}}\right)^2+\left(z'_{\text{B}}-z'_{\text{A}}\right)^2}=L,$$

adică lungimea tijei este aceeași în raport cu ambele sisteme de referință.

2) 1,25 puncte

Cunoscând coordonatele de poziție ale capetelor mobile, A și B ale tijei, la momentul t', calculăm componentele vitezelor celor două capete în raport cu sistemul R':

$$\frac{\mathrm{d}y'_{\text{A}}}{\mathrm{d}t'}=\text{v}'_{\text{A,Y'}}=-u;\;\; \frac{\mathrm{d}z'_{\text{A}}}{\mathrm{d}t'}=\text{v}'_{\text{A,Z'}}=-\text{v}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}};$$

$$\frac{\mathrm{d}y'_{\text{B}}}{\mathrm{d}t'}=\text{v}'_{\text{B,Y'}}=-u;\;\; \frac{\mathrm{d}z'_{\text{B}}}{\mathrm{d}t'}=\text{v}'_{\text{B,Z'}}=-\text{v}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},$$

astfel încât, rezultă:

$$\text{v}'_{\text{A}}=\sqrt{\left(\text{v}'_{\text{A,Y'}}\right)^2+\left(\text{v}'_{\text{A,Z'}}\right)^2}=\sqrt{u^2+\text{v}^2-\frac{u^2\,\text{v}^2}{c^2}};$$

$$\text{v}'_{\text{B}}=\sqrt{\left(\text{v}'_{\text{B,Y'}}\right)^2+\left(\text{v}'_{\text{B,Z'}}\right)^2}=\sqrt{u^2+\text{v}^2-\frac{u^2\,\text{v}^2}{c^2}};$$

$$\text{v}'_{\text{A}}=\text{v}'_{\text{B}}=\text{v}'_{\text{tija}}\;;$$

$$\tan\varphi=\frac{\text{v}'_{\text{A,Y'}}}{\text{v}'_{\text{A,Z'}}}=\frac{-u}{-\text{v}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{u}{\text{v}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

ceea ce presupune că, în raport cu observatorul din sistemul mobil, R', așa cum indică desenul din figura 4, tija nu coboară pe verticală, ci pe o direcție care formează cu verticala unghiul φ.

Caz particular
0,50 puncte

$$\mathrm{v} << c;\ u << c;\ \tan\varphi = \frac{u}{\mathrm{v}}.$$

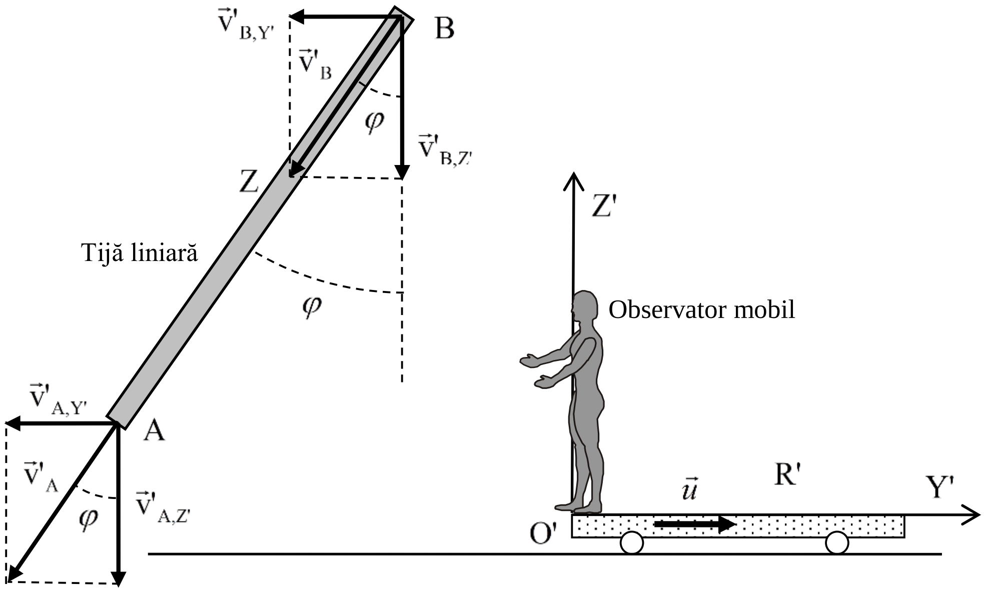


Fig. 4

b) 3,00 puncte
1) 1,25 puncte

În sistemul de referință R, pentru observatorul O, contactele capetelor A și B cu solul, sunt două evenimente simultane, care se produc la același moment, t.

Ca urmare, coordonatele capetelor A și B, în momentul atingerii solului, în sistemul R, sunt:

$$\mathbf{A:}\ x_A = 0;\ \ y_A = 0;\ z_A = 0;\ t_A = t;$$
$$\mathbf{B:}\ x_B = 0;\ \ y_B = L;\ z_B = 0;\ t_B = t.$$

În același moment, coordonatele acelorași două extremități, în raport cu sistemul inerțial R', în acord cu transformările Lorentz speciale, sunt:

$$\mathbf{A:}\ x'_A = 0;\ \ y'_A = \frac{y_A - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{0 - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\ z'_A = 0;$$

$$t'_A = \frac{t_A - \frac{u}{c^2}y_A}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_A}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$

$$\mathbf{B:}\ x'_B = 0;\ y'_B = \frac{y_B - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{L - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\ z'_B = 0;$$

$$t'_B = \frac{t_B - \frac{u}{c^2}y_B}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t_B - \frac{u}{c^2}L}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{u}{c^2}L}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} < t'_A,$$

astfel încât, pentru observatorul O' din sistemul R', contactele capetelor A și B ale tijei cu solul nu sunt două evenimente simultane, intervalul de timp dintre cele două contacte (atingeri) fiind:

$$\tau' = t'_A - t'_B = \frac{\frac{u}{c^2}L}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Rezultă:

$$u = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{\tau' c}\right)^2}};\ u = 0{,}196\cdot c.$$

2) 1,25 puncte

Distanța dintre punctele de pe sol, unde capetele A și B ale tijei ating solul orizontal, în raport cu observatorul din sistemul R', este:

$$D' = y'_{\mathrm{B}} - y'_{\mathrm{A}} = \frac{L-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} > L;\ \ D' = 1{,}53\,\mathrm{m}.$$

Caz particular:

0,50 puncte

$$\mathrm{v} << c;\ u << c;\ D' = L.$$

c) 4,00 puncte

Pentru observatorul O' din sistemul R', capătul B al tijei ajunge la sol înaintea capătului A al tijei ($t'_{\mathrm{B}} < t'_{\mathrm{A}}$), așa cum indică desenul din figura 5, atunci când unghiul dintre tijă și solul orizontal este θ.

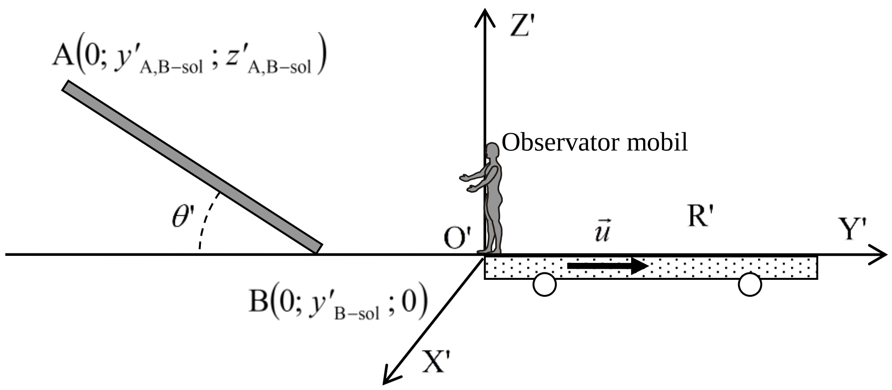


Fig. 5

Coborând de la înălțimea h, coordonatele capetelor A și B ale tijei, în raport cu observatorul O din sistemul R, într-un moment oarecare, t, înainte de atingerea solului, sunt:

$$\mathrm{A}:\ x_{\mathrm{A}} = 0;\ \ y_{\mathrm{A}} = 0;\ z_{\mathrm{A}} = h - \mathrm{v}t;\ t_{\mathrm{A}} = t;$$

$$\mathrm{B}:\ x_{\mathrm{B}} = 0;\ \ y_{\mathrm{B}} = L;\ z_{\mathrm{B}} = h - \mathrm{v}t;\ t_{\mathrm{B}} = t.$$

Contactul capătului A cu solul, ca și contactul capătului B cu solul, pentru observatorul O din sistemul R, se realizează atunci când:

$$z_{\mathrm{A}} = 0;\ h - \mathrm{v}t_{\mathrm{A-sol}} = 0;$$

$$z_{\mathrm{B}} = 0;\ h - \mathrm{v}t_{\mathrm{B-sol}} = 0,$$

la momentul:

$$t_{\mathrm{A-sol}} = t_{\mathrm{B-sol}} = \frac{h}{\mathrm{v}}.$$

Pentru observatorul O' din sistemul R' cele două capete ale tijei nu ajung simultan pe sol. Primul ajunge pe sol capătul B, la momentul:

$$t'_{\mathrm{B-sol}} = \frac{t_{\mathrm{B-sol}} - \frac{u}{c^2}y_{\mathrm{B}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{h}{\mathrm{v}} - \frac{u}{c^2}L}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

În acest moment, $t'_{\mathrm{B,sol}}$, pentru observatorul O' din sistemul R', capătul A al tijei încă n-a ajuns la sol, coordonatele sale, în acord cu transformările Lorentz speciale, fiind:

$$x'_{\mathrm{A,B-sol}}=0;$$

$$y'_{\mathrm{A,B-sol}}=\frac{y_{\mathrm{A,B-sol}}-ut_{\mathrm{A,B-sol}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$

$$t_{\mathrm{A,B-sol}}=t_{\mathrm{B-sol}}=\frac{h}{\mathrm{v}};$$

$$y_{\mathrm{A,B-sol}}=0,$$

deoarece capătul A al tijei este obligat să alunece pe axa OZ;

$$y'_{\mathrm{A,B-sol}}=\frac{-ut_{\mathrm{B-sol}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{-u\frac{h}{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Dacă pentru observatorul O din sistemul R, contactul cu solul al capătului B se realizează la momentul $t_{\mathrm{B-sol}}=h/\mathrm{v}$, pentru observatorul O' din sistemul R', contactul capătului B cu solul se produce la momentul $t'_{\mathrm{B-sol}}$, atunci când capătul A al tijei, pentru observatorul O', încă n-a ajuns la sol. El va ajunge la sol, la momentul $t'_{\mathrm{A-sol}}>t'_{\mathrm{B-sol}}$.

Pentru observatorul O' din sistemul R', la momentul $t'_{\mathrm{B-sol}}$, adică atunci când capătul B a ajuns la sol, pentru capătul A este momentul:

$$t'_{\mathrm{A,B-sol}}=t'_{\mathrm{B-sol}};$$

$$t'_{\mathrm{A,B-sol}}=\frac{t_{\mathrm{A,B-sol}}-\frac{u}{c^2}y_{\mathrm{A,B-sol}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$

$$y_{\mathrm{A,B-sol}}=0;$$

$$t'_{\mathrm{A,B-sol}}=\frac{t_{\mathrm{A,B-sol}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{t_{\mathrm{A-sol}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{t_{\mathrm{B-sol}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$

$$t'_{\mathrm{A,B-sol}}=\frac{t_{\mathrm{B-sol}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

$$t_{\mathrm{A,B-sol}}=t_{\mathrm{B-sol}}=t'_{\mathrm{A,B-sol}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},$$

astfel încât:

$$y'_{\mathrm{A,B-sol}}=\frac{-ut_{\mathrm{B-sol}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{-u\frac{h}{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=-ut'_{\mathrm{A,B-sol}};$$

$$z'_{\mathrm{A,B-sol}}=z_{\mathrm{A,B-sol}},$$

deoarece capătul A al tijei, în timpul căderii acesteia, rămâne pe axa OY, astfel încât $y_{\mathrm{A}}=0;$

$$z_{\mathrm{A}}=h-\mathrm{v}t;$$

$$z_{\mathrm{A,B-sol}}=h-\mathrm{v}t_{\mathrm{A,B-sol}}=h-\mathrm{v}\cdot t'_{\mathrm{A,B-sol}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}};$$

$$z'_{\mathrm{A,B-sol}}=h-\mathrm{v}t_{\mathrm{A,B-sol}}=h-\mathrm{v}\cdot t'_{\mathrm{A,B-sol}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}};$$

$$t'_{\mathrm{B-sol}} = \frac{t_{\mathrm{B-sol}} - \dfrac{u}{c^2} y_{\mathrm{B}}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{\dfrac{h}{\mathrm{v}} - \dfrac{u}{c^2} L}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}.$$

$$t'_{\mathrm{B-sol}} = \frac{\dfrac{h}{\mathrm{v}} - \dfrac{u}{c^2} L}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = t'_{\mathrm{A,B-sol}};$$

$$y'_{\mathrm{A,B-sol}} = -ut'_{\mathrm{A,B-sol}};$$

$$y'_{\mathrm{A,B-sol}} = -u\,\frac{\dfrac{h}{\mathrm{v}} - \dfrac{u}{c^2} L}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}};$$

$$z'_{\mathrm{A,B-sol}} = h - \mathrm{v}\cdot t'_{\mathrm{A,B-sol}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}};$$

$$z'_{\mathrm{A,B-sol}} = h - \mathrm{v}\cdot\left(\frac{h}{\mathrm{v}} - \frac{u}{c^2} L\right);$$

$$z'_{\mathrm{A,B-sol}} = \frac{u\mathrm{v}}{c^2} L;$$

$$y'_{\mathrm{A,B-sol}} = -u\,\frac{\dfrac{h}{\mathrm{v}} - \dfrac{u}{c^2} L}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}};$$

$$x'_{\mathrm{A,B-sol}} = 0;\ y'_{\mathrm{A,B-sol}} = -u\,\frac{\dfrac{h}{\mathrm{v}} - \dfrac{u}{c^2} L}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}};\ z'_{\mathrm{A,B-sol}} = \frac{u\mathrm{v}}{c^2} L,$$

reprezentând coordonatele capătului A al tijei, în momentul când capătul B atinge solul, așa cum apar ele pentru observatorul $\mathrm{O'}$ din sistemul $\mathrm{R'}$.

Coordonatele capătului B al tijei, în momentul atingerii solului, așa cum apar ele pentru observatorul $\mathrm{O'}$ din sistemul $\mathrm{R'}$, sunt:

$$x'_{\mathrm{B-sol}} = 0;$$

$$y'_{\mathrm{B-sol}} = \frac{y_{\mathrm{B-sol}} - ut_{\mathrm{B-sol}}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{L - ut_{\mathrm{B-sol}}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}};\ t_{\mathrm{B-sol}} = \frac{h}{\mathrm{v}};$$

$$y'_{\mathrm{B-sol}} = \frac{L - \dfrac{u}{\mathrm{v}} h}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}};$$

$$z'_{\mathrm{B-sol}} = 0.$$

În aceste condiții, rezultă:

$$\tan\theta' = \frac{z'_{\mathrm{A,B-sol}} - z'_{\mathrm{B-sol}}}{y'_{\mathrm{B-sol}} - y'_{\mathrm{A,B-sol}}};$$

$$\tan\theta' = \frac{u\mathrm{v}}{c^2\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}.$$ .... **3,50 puncte**

Caz particular:
0,50 puncte

$$\mathrm{v} << c;\ u << c;\ \tan\theta' = 0;\ \theta' = 0.$$

Subiectul III: rezolvare și barem

A) Asupra particulei acționează forța Lorentz:

$$m\vec{a} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = qv_yB \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -qv_xB \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

…………………………………. 1 punct

După axa Oz particula se deplasează uniform cu viteza v_{0z}. Din condițiile inițiale se obține $z = v_{oz}t$.
Derivând ecuațiile de mișcare pe direcțiile Ox și Oy în raport cu timpul se obține:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m^2}v_x$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m^2}v_y$$

Cele două ecuații admit soluții de forma:

$v_x = V_x\sin(\omega t + \varphi_{0x})$ respectiv

$v_y = V_y\sin(\omega t + \varphi_{0y})$.

Din condițiile inițiale rezultă legile vitezelor:

$$\begin{cases} v_x = v_{0y}sin\omega t \\ v_y = v_{0y}cos\omega t \\ v_z = v_{0z} \end{cases}$$

Unde $\omega = \frac{qB}{m}$

…………………………………. 1 punct

Integrând legile vitezelor și utilizând condițiile inițiale se obțin legile de mișcare:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_{0y}}{\omega} - \dfrac{v_{0y}}{\omega}cos\omega t \\ y = \dfrac{v_{0y}}{\omega}sin\omega t \\ z = v_{0z}t \end{cases}$$

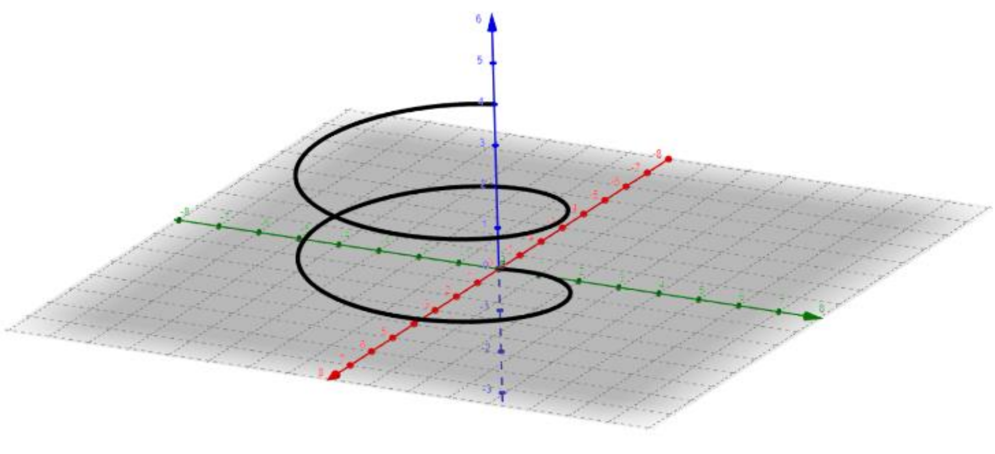
…………………………………. 1 punct

Ridicând la pătrat și adunând cele două relații se obține relația:

$$(x - \frac{v_{0y}}{\omega})^2 + y^2 = \frac{v_{0y}^2}{\omega^2}$$

Aceasta este ecuația unui cerc cu centrul de coordonate $x = \frac{v_{0y}}{\omega}$, $y = 0$ și cu raza $\frac{v_{0y}}{\omega}$.
Traiectoria particulei este o elicoidă cu axa de simetrie paralelă cu axa Oz, în planul xOz care intersectează axa Ox în punctul de coordonată $\frac{v_{0y}}{\omega}$

…………………………………. 1 punct



B)

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v}\mathrm{x}\vec{B})$$

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = qE + qv_yB \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -qv_xB \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

.... 1 punct

După axa Oz particula se deplasează ca în cazul anterior:

$$z = v_{0z}t.$$

Procedând ca la punctul anterior se obține:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m^2}v_x$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m^2}(v_y + \frac{E}{B})$$

Cu schimbarea de variabilă:

$$u_x = v_x$$

$u_y = v_y + \frac{E}{B}$ obținem:

$$\frac{d^2u_x}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m^2}u_x$$

$$\frac{d^2u_y}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m^2}u_y$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații sunt de forma:

$$u_x = U_x\sin(\omega t + \varphi_{0x})$$

$$u_y = U_y\sin(\omega t + \varphi_{0y})$$

Din condițiile inițiale:

$$\begin{cases} v_x = \left(v_{0y} + \dfrac{E}{B}\right)sin\omega t \\ v_y = \left(v_{0y} + \dfrac{E}{B}\right)cos\omega t - \dfrac{E}{B} \\ v_z = v_{0z} \end{cases}$$

.... 1 punct

Integrând primele două ecuații și utilizând condițiile inițiale obținem:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_{0y} + \frac{E}{B}}{\omega} - \dfrac{v_{0y} + \frac{E}{B}}{\omega}cos\omega t \\ y = \dfrac{v_{0y} + \frac{E}{B}}{\omega}sin\omega t - \dfrac{E}{B}t \\ z = v_{0z}t \end{cases}$$

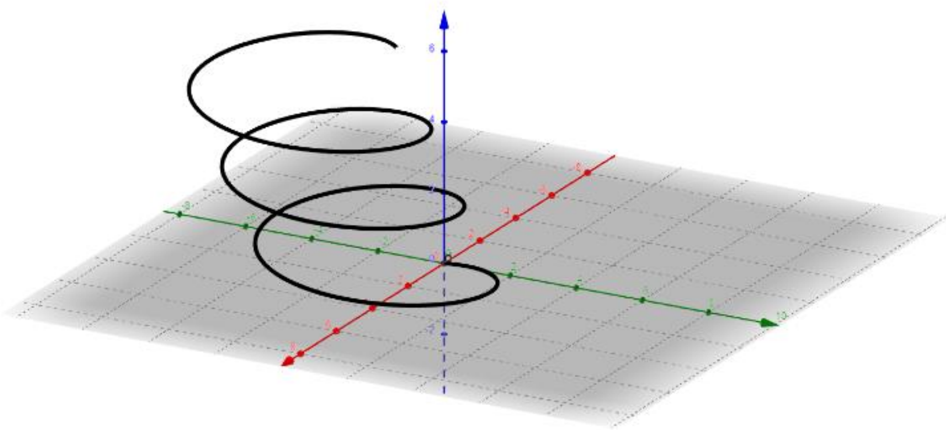
.... 1 punct

Din cele două relații se obține ecuația proiecției traiectoriei în planul xOy:

$$\left(x - \frac{v_{0y} + \frac{E}{B}}{\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{B}t\right)^2 = \left(\frac{v_{0y} + \frac{E}{B}}{\omega}\right)^2$$

Aceasta este ecuația unui cerc cu raza $\frac{v_{0y}+\frac{E}{B}}{\omega}$, care are centrul, la momentul inițial, în punctul de coordonate $(\frac{v_{0y}+\frac{E}{B}}{\omega}, 0{,}0)$. Centrul cercului se deplasează uniform cu viteza v_{0z} de-a lungul axei Oz, și cu viteza $\frac{E}{B}$ în sens invers axei Oy (perpendicular pe planul determinat de vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$).

.... 1 punct



Viteza $\frac{E}{B}$, cu care centrul cercului se îndepărtează de planul determinat de vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$, se numește viteza de drift $\vec{E}$x$\vec{B}$.

C) În cazul aproximației propuse, energia și momentul cinetic se conservă:

$$\frac{mv_\perp^2(0)}{2}+\frac{mv_\parallel^2(0)}{2}=\frac{mv_\perp^2(y)}{2}+\frac{mv_\parallel^2(y)}{2}$$

$$r(0)mv_\perp(0)=r(y)mv_\perp(y)$$

Unde:

$$r(0)=\frac{mv_\perp(0)}{qB(0)}$$

$$r(y)=\frac{mv_\perp(y)}{qB(y)}$$

……………………………….0,5 puncte

Înlocuind în relația de conservare a momentului cinetic se obține:

$$v_\perp^2(y)=v_\perp^2(0)\frac{B(D)}{B(0)}$$

Înlocuind această expresie în legea de conservare a energiei obținem:

$$v_\parallel^2(y)=v_\perp^2(0)+v_\parallel^2(0)-v_\perp^2(0)\frac{B(y)}{B(0)}$$

……………………………….0,5 puncte

Pentru a trece de $y=D$ este necesar ca $v_\parallel^2(D)\geq 0$. În caz contrar particula nu ajunge până la $y=D$ sau pentru egalitate atinge această poziție.

În cazul nostru trebuie să punem condiția:

$$v_\perp^2(0)+v_\parallel^2(0)-v_\perp^2(0)\frac{B(D)}{B(0)}\leq 0$$

……………………………….0,5 puncte

Din care rezultă că:

$$sin\alpha\geq\frac{B(0)}{B(D)}.$$

……………………………….0,5 puncte

Particulele care îndeplinesc această relație nu vor putea depăși planele xOz corespunzătoare lui $y=D$, respectiv $y=-D$. Acestea sunt prinse într-o capcană magnetică.

Bareme propuse de:

prof. Florin BUTUȘINĂ – Colegiul Național ”Simion Bărnuțiu”, *Șimleu-Silvaniei*

prof. Constantin GAVRILĂ – Colegiul Național ”Sfântul Sava”*, București*

prof. dr. Mihail SANDU – Liceul Tehnologic de Turism, *Călimănești*

prof. Viorel SOLSCHI*, Colegiul Național „Mihai Eminescu” – Satu Mare*