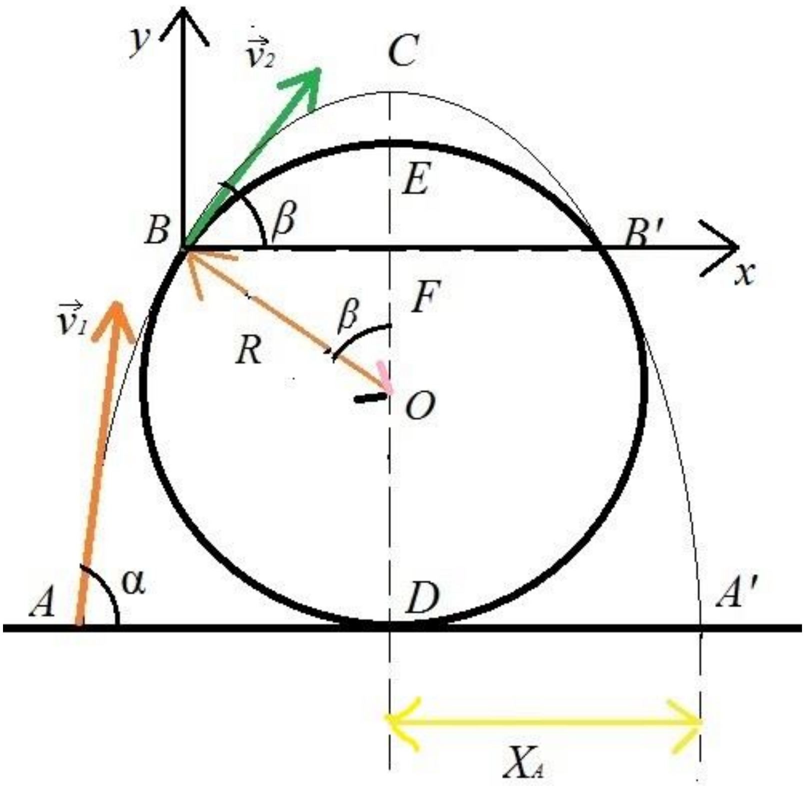
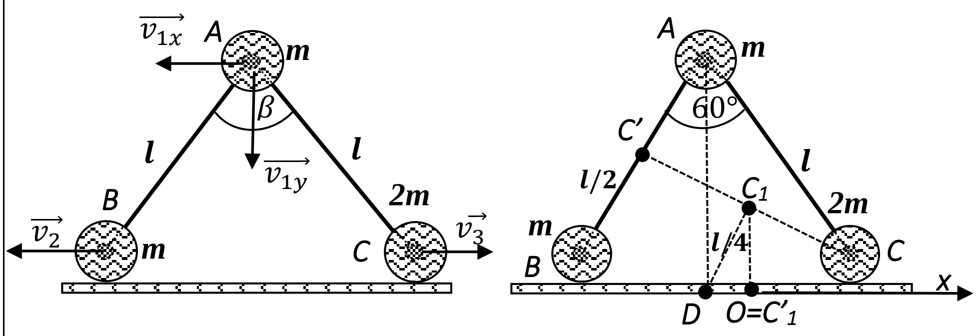
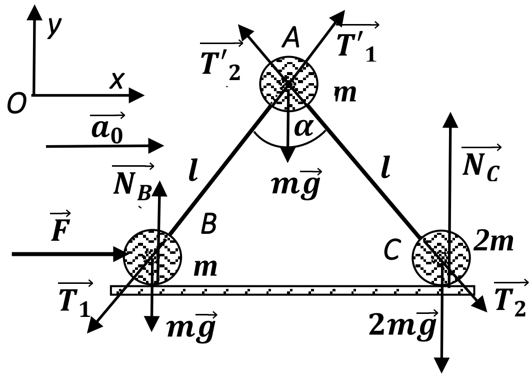
Subiectul I: Lăcusta și broasca (10 puncte)

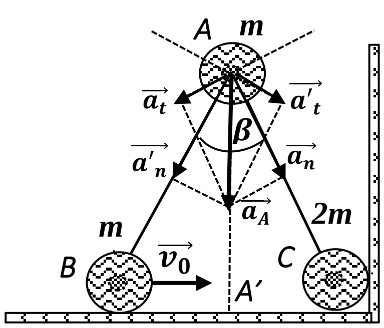
Subiectul I	Parțial	Punctaj
a.		
 		
Notând cu t, timpul la urcare pe traiectoria parabolică, între punctele B și C, măsurat din momentul în care lăcusta se află în punctul B:		
$$v_2 \sin\beta = gt$$	0,50 p	
$$v_2 \cos\beta \, t = R \sin\beta$$	0,50 p	
Prin prelucrare se obține: $$v_2^2 = \frac{gR}{\cos\beta}$$	0,50 p	
Conservarea energiei mecanice între punctele A și B:		**4,00 p**
$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgR(1+\cos\beta)$$	1,00 p	
$$v_1 = \sqrt{2gR\left(1+\cos\beta+\frac{1}{2\cos\beta}\right)}$$	0,50 p	

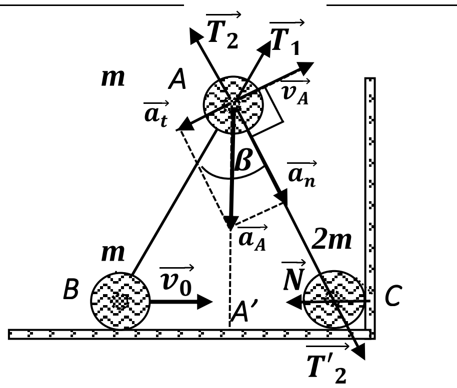
Pentru a stabili valoarea minimă a vitezei v_1 ,trebuie să calculăm valoarea minimă a expresiei $\cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta}$. Pentru aceasta, scriem inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică: $$\frac{1}{2}\left(\cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta}\right) \geq \sqrt{\cos\beta \frac{1}{2\cos\beta}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$	0,25 p	
Valoarea minimă a expresiei $\cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta}$ este $\sqrt{2}$. Aceasta corespunde unghiului $\beta = 45^0$.	0,25 p	
Valoarea minimă a vitezei de desprindere de la sol a lăcustei este: $$v_{1min} = \sqrt{2gR\left(1+\sqrt{2}\right)} \approx 2{,}2\ \frac{m}{s}$$	0,50 p	
b.		
Valoarea vitezei în punctul B: $v_2 = 1{,}68\frac{m}{s}$	0,25 p	3,00 p
$$v_1 cos\alpha = v_2 cos\beta$$	0,50 p	
$cos\ \alpha = cos\beta\sqrt{\frac{1}{2cos\beta(1+\sqrt{2})}} = 0{,}384,\ \alpha = 67{,}5°$	0,75 p	
Aruncarea oblică fiind o mișcare simetrică față de verticală: AD=DA'		
$$AD = v_1 \cos\alpha\ t_1$$	0,50 p	
$$v_1 \sin\alpha\ = gt_1$$	0,50 p	
$$AD = \frac{v_1^2 \cos\alpha sin\alpha}{g} = 0{,}17\ m$$	0,25 p	
$DA' = 0{,}17\ m$, deci lăcusta va ateriza exact în locul unde o așteaptă broasca.	0,25 p	
c.		
Varianta 1: Considerând puterea dezvoltată de lăcustă:		
$$P = \frac{0+F}{2}v_1$$	0,50 p	
$$L = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_1^2$$	0,50 p	
$$P = \frac{L}{\Delta t}$$	0,50 p	**3,00 p**
$$Fv_1 = \frac{mv_1^2}{\Delta t}$$	0,50 p	
$$F = \frac{mv_1}{\Delta t} = 3{,}52\ N$$	1,00 p	
Sau	Sau	**Sau**
Varianta 2: Folosind teorema de variație a impulsului:		
Ox: $m \cdot v_1 \cdot \cos\alpha = F_x \cdot \Delta t$	1,00 p	
Oy: $m \cdot v_1 \cdot \sin\alpha = (F_y - mg) \cdot \Delta t$	1,00 p	**3,00 p**
$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} \cong 3{,}52\ N$$	1,00 p	

Subiectul II: Bile, tije, articulații (10 puncte)

Subiectul II	Parțial	Punctaj
		
a. $mv_{1x} + mv_2 - 2mv_3 = 0$	0,25 p	4,50 p
$\frac{m}{2}v_2^2 + \frac{m}{2}(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{2m}{2}v_3^2 = mgl\left[\cos({}^{\alpha}/_{2}) - \cos({}^{\beta}/_{2})\right]$	0,25 p	
$v_2\sin({}^{\beta}/_{2}) = v_{1y}\cos({}^{\beta}/_{2}) + v_{1x}\sin({}^{\beta}/_{2})$	0,25 p	
$v_3\sin\left({}^{\beta}/_{2}\right) = v_{1y}\cos\left({}^{\beta}/_{2}\right) - v_{1x}\sin({}^{\beta}/_{2})$	0,25 p	
$v_1 = \sqrt{\frac{gl\left[\cos({}^{\alpha}/_{2}) - \cos({}^{\beta}/_{2})\right]\left[1 + 16tg^2({}^{\beta}/_{2})\right]}{2\left[11 + 4tg^2({}^{\beta}/_{2})\right]}}$	0,50 p	
$v_2 = 5\sqrt{\frac{gl\left[\cos({}^{\alpha}/_{2}) - \cos({}^{\beta}/_{2})\right]}{2\left[11 + 4tg^2({}^{\beta}/_{2})\right]}}$	0,50 p	
$v_3 = 3\sqrt{\frac{gl\left[\cos({}^{\alpha}/_{2}) - \cos({}^{\beta}/_{2})\right]}{2\left[11 + 4tg^2({}^{\beta}/_{2})\right]}}$	0,50 p	
Centrul de masă al sistemului, C_1, se găsește la jumătatea medianei CC’.	0,25 p	
Fie O=C’$_1$ proiecția pe orizontală a centrului de masă, considerat ca origine a unei axe de coordonate Ox. În starea inițială, coordonatele pozițiilor celor trei bile sunt: $x_A = -\frac{l}{8};\ x_B = -\frac{5l}{8};\ x_C = \frac{3l}{8}$	0,25 p	
În timpul mișcării sistemului, centrul său de masă nu se deplasează de-a	0,25 p	
lungul axei Ox: $mx'_A + mx'_B + 2mx'_C = 0$	0,25 p	
$x'_B = x'_A - l;\ x'_C = x'_A + l$	0,25 p	
$x'_A = -\frac{l}{4};\ x'_B = -\frac{5l}{4};\ x'_C = \frac{3l}{4}$		
Modulele vectorilor deplasare: $\left\lvert\overrightarrow{AA'}\right\rvert = \sqrt{(\Delta x_A)^2 + (\Delta y_A)^2} = \frac{7l}{8}$	0,25 p	
$\left\lvert\overrightarrow{BB'}\right\rvert = \lvert\Delta x_B\rvert = \frac{5l}{8}$	0,25 p	
$\left\lvert\overrightarrow{CC'}\right\rvert = \lvert\Delta x_C\rvert = \frac{3l}{8}$	0,25 p	

<table>
<tr><td>


b. Pentru întregul sistem: $\vec{F} = 4m\overrightarrow{a_0} => a_0 = \frac{F}{4m}$
Pentru bila B, Ox: $F - T_1 \sin\frac{\alpha}{2} = ma_0$
Pentru bila C, Ox: $T_2 \sin\frac{\alpha}{2} = 2ma_0$
Pentru bila A, Oy: $(T_1 + T_2)\cos\frac{\alpha}{2} - mg = 0$
Rezultă $F = \frac{4}{5} mgtg\frac{\alpha}{2}$
</td>
<td>0,50 p
0,50 p
0,50 p
0,50 p
0,50 p</td>
<td>2,50 p</td></tr>
<tr><td>




c. Accelerația $\overrightarrow{a_A}$ a bilei A are componentele $\overrightarrow{a_t}$ și $\overrightarrow{a_n}$, față de sistemul de referință fix legat de bila C, precum și componentele $\overrightarrow{a'_t}$ și $\overrightarrow{a'_n}$, în raport cu sistemul de referință inerțial mobil, legat de bila B, deci $\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{a'_t} + \overrightarrow{a'_n}$.
Dar $\overrightarrow{a'_t}$ și $\overrightarrow{a'_n}$ sunt simetricele componentelor $\overrightarrow{a_t}$ și $\overrightarrow{a_n}$ față de axa de simetrie a sistemului AA', având direcție verticală. Prin urmare, rezultanta $\overrightarrow{a_A} \| AA'$ are direcție verticală.
$v_0 \sin\left({}^{\beta}/_{2}\right) = v_A sin\beta = \omega l sin\beta => \omega l = \frac{v_0}{2cos\left({}^{\beta}/_{2}\right)}$
$a_n = \omega^2 l = \frac{v_0^2}{4lcos^2\left({}^{\beta}/_{2}\right)}$
$a_t = a_n tg\left({}^{\beta}/_{2}\right) = \frac{v_0^2 \sin\left({}^{\beta}/_{2}\right)}{4lcos^3\left({}^{\beta}/_{2}\right)}$
$a_A = \frac{a_n}{cos\left({}^{\beta}/_{2}\right)} = \frac{v_0^2}{4lcos^3\left({}^{\beta}/_{2}\right)}$
$mg - (T_1 + T_2)\cos\frac{\beta}{2} = ma_A$
$T_1 \sin\frac{\beta}{2} - T_2 \sin\frac{\beta}{2} = 0$
</td>
<td>0,50 p
0,50 p
0,25 p
0,25 p
0,25 p
0,25 p
0,25 p
0,25 p
0,25 p</td>
<td>3,00 p</td></tr>
</table>

$T_1 = T_2 = \dfrac{m(g - a_A)}{2cos\left(\beta/_2\right)} = \dfrac{mg}{2cos\left(\beta/_2\right)}\left[1 - \dfrac{v_0^2}{4glcos^3\left(\beta/_2\right)}\right]$ $N = T_2 \sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{mgtg\left(\beta/_2\right)}{2}\left[1 - \dfrac{v_0^2}{4glcos^3\left(\beta/_2\right)}\right]$	0,25 p	

Subiectul III: Ciocniri comparate (10 puncte)

Subiectul III	Parțial	Punctaj
a. Conservarea impulsului: $m \cdot v_0 = M \cdot V + m \cdot v$	0,25 p	3,00 p
Expresia impulsului imprimat blocului: $M \cdot V = m \cdot v_0 - m \cdot v$	0,25 p	
- glonțul de cauciuc ricoșează: $m \cdot v < 0 \Rightarrow M \cdot V = m \cdot v_0 + \lvert m \cdot v \rvert > m \cdot v_0$	0,25 p	
- glonțul de aluminiu va pătrunde „cel mai probabil” parțial sau total în bloc sau chiar va trece prin bloc, astfel încât viteza lui va rămâne, după impact, orientată în același sens sau se va anula: $m \cdot v > 0 \Rightarrow M \cdot V = m \cdot v_0 - m \cdot v \leq m \cdot v_0$	0,25 p	
Se va observa o deviație mai mare a firului în cazul glonțului de cauciuc.	0,25 p	
Conservarea energiei: $\frac{m \cdot {v_0}^2}{2} - \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{M \cdot V^2}{2} + Q$	0,50 p	
O parte din energia pe care o pierde glonțul va reprezenta energia cinetică a blocului, iar cealaltă parte (Q) se va consuma în efecte termice și de deformare.	0,50 p	
În cazul glonțului de cauciuc, viteza blocului este mai mare, deci energia de deformare e mai mică.	0,25 p	
În cazul glonțului de aluminiu, viteza blocului este mai mică, deci energia de deformare mai mare.	0,25 p	
Blocul va fi mai deteriorat în urma impactului cu glonțul de aluminiu.	0,25 p	
b. Dacă glonțul pătrunde în bloc și rămâne în el (ciocnire plastică): $m \cdot v_0 = (M + m) \cdot \frac{v_0}{2}$	0,50 p	4,00 p
$\frac{m \cdot {v_0}^2}{2} = \frac{(m + M) \cdot {v_0}^2}{8} + R \cdot \frac{m \cdot {v_0}^2}{2}$	0,50 p	
$r = 1; R = \frac{1}{2}$	0,50 p	
Dacă glonțul nu rămâne în bloc, după ciocnire: $M \cdot V = m \cdot v_0 - m \cdot v$	0,50 p	
$\frac{m \cdot {v_0}^2}{2} - \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{M \cdot V^2}{2} + R \cdot \frac{m \cdot {v_0}^2}{2}$	0,50 p	
Dacă glonțul ricoșează: $v = -\frac{v_0}{2} \Longrightarrow 0 < r < \frac{1}{3}; 0 < R < \frac{3}{4}$	0,50 p	
Dacă glonțul trece prin bloc: $v = \frac{v_0}{2}; V < \frac{v_0}{2} \Longrightarrow 0 < r < 1; \frac{1}{2} < R < \frac{3}{4}$	0,50 p	
Dacă glonțul împinge blocul și se mișcă în urma lui: $v = \frac{v_0}{2}; V > \frac{v_0}{2} \Longrightarrow r > 1; R < \frac{1}{2}$	0,50 p	
c. Teorema de variație a impulsului pentru glonț: - pe direcție orizontală: $m \cdot \frac{v_0}{2} \cdot \cos\beta + m \cdot v_0 \cdot \cos\alpha = N \cdot \Delta t$	0,50 p	
- pe direcție verticală: $m \cdot \frac{v_0}{2} \cdot \sin\beta - m \cdot v_0 \cdot \sin\alpha = -\mu \cdot N \cdot \Delta t$	0,50 p	

$$\mu = \frac{2 \cdot \sin\alpha - \sin\beta}{2 \cdot \cos\alpha + \cos\beta} \cong 0{,}6$$ Variația de impuls a glonțului este egală în modul cu variația de impuls a blocului. Componenta vericală a forței medii de impact nu mișcă blocul pe verticală, ci doar detensionează firul într-o anumită măsură. Pentru bloc, pe direcție orizontală: $$M \cdot V = 0 + m \cdot \frac{v_0}{2} \cdot \cos\beta + m \cdot v_0 \cdot \cos\alpha$$ $$\frac{m \cdot {v_0}^2}{2} - \frac{m \cdot {v_0}^2}{8} = \frac{M \cdot V^2}{2} + R \cdot \frac{m \cdot {v_0}^2}{2}$$ $$R = \frac{3}{4} - r\left(\cos\alpha + \frac{\cos\beta}{2}\right)^2 \cong 0{,}75 - 0{,}73 \cdot r$$	0,50 p 0,50 p 0,50 p 0,50 p	**3,00 p**

Barem de evaluare și de notare propus de:

Prof. dr. Alpár István Vita Vörös, Liceul Teoretic „Apáczai Csere János”, Cluj-Napoca

Prof. Cristian Miu, Colegiul Național „Ion Minulescu”, Slatina

Prof. Gabriela Alexandru, Colegiul Național „Grigore Moisil”, București

Prof. Jean-Marius Rotaru, Colegiul Național Iași, Iași

Prof. dr. Daniel Lazăr, Colegiul Național „Iancu de Hunedoara”, Hunedoara