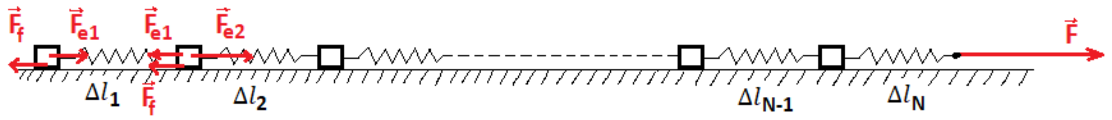
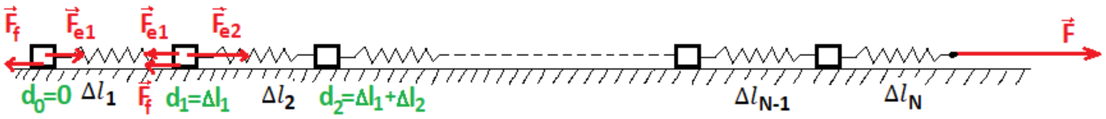
Subiectul I: La antrenament... **(10puncte)**

Subiectul I	Parțial	Punctaj
a.		
$t_{1C} = \dfrac{l_0}{2v}$	0,50 p	
$t_{2C} = t_{C-tijă} + t_{C-cădereliberă} = \dfrac{\boldsymbol{l_0}}{\boldsymbol{v}} + \sqrt{\dfrac{\boldsymbol{2l_0}}{\boldsymbol{g}}}$	0,50 p	
$v_G = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{v\Delta t + \frac{Gv\Delta t}{ES}}{\Delta t} = v\left(1 + \dfrac{Mg}{ES}\right) = v(1 + \dfrac{Mg}{kl_0})$	1,50 p	4,00 p
$t_{1G} = \dfrac{l_0}{2v_G} = \dfrac{l_0}{2v(1 + \frac{Mg}{kl_0})}$	0,50 p	
$h_G = H - l_{alungitmaxim} = 2l_0 - l_0\left(1 + \frac{Mg}{kl_0}\right) = l_0\left(1 - \frac{Mg}{kl_0}\right)$	0,50 p	
$t_{2G} = t_{G-coardă} + t_{G-cădereliberă} = \dfrac{l_0}{v} + \sqrt{\dfrac{2\,h_G}{g}} = \dfrac{l_0}{v} + \sqrt{\dfrac{2\,l_0\left(1 - \frac{Mg}{kl_0}\right)}{g}}$	0,50p	
b. Împărțim tubul într-un număr foarte mare, N ,de porțiuni egale, fiecare dintre ele având o constantă de elasticitate $k_e = k \cdot N$.	0,50 p	
		
Aceste porțiuni vor fi deformate diferit, datorită forțelor elastice diferite, necesare diferitelor porțiuni, de a echilibra efectul forțelor de frecare. În porțiunea de indice $i \in (1, N)$, măsurată de la capătul liber B, forța elastică și deformarea vor fi:		3,00 p
$F_{elastică,i} = i \cdot F_{frecare-elementară} = i\dfrac{\mu mg}{N}$	0,50 p	
$\Delta l_i = \dfrac{F_{elastică,i}}{k_e} = \dfrac{i\frac{\mu mg}{N}}{k \cdot N} = i\dfrac{\mu mg}{kN^2}$	1,00 p	
Alungirea întregului tub este : $\Delta l_{total} = \sum_{i=1}^{N} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{N} i\dfrac{\mu mg}{kN^2} = \dfrac{\mu mg}{kN^2}\sum_{i=1}^{N} i = \dfrac{\mu mgN(N+1)}{2kN^2} \cong \dfrac{\mu mg}{2k}$	1,00 p	

c.		
$L_{tracțiune} = -\left(L_{Ff} + L_{Felastică}\right) = \left\|L_{Ff}\right\| + \Delta E_{p\ elastică}$	0,50 p	
$L_{tracțiune} = 2\Delta E_{p\ elastică} = 2\left\|L_{Ff}\right\|$	0,25 p	
$\Delta E_{p\ elastică} = E_{p\ elastică\ finală} - E_{p\ elastică\ inițială} = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i \Delta l_i^2}{2} - 0$	0,50 p	**3,00 p**
$\Delta E_{p\ elastică} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Nk \cdot \left(i \frac{\mu mg}{kN^2}\right)^2}{2} = \frac{(\mu mg)^2}{2kN^3} \sum_{i=1}^{N} i^2$	0,75 p	
$\Delta E_{p\ elastică} = \frac{(\mu mg)^2}{2 \cdot k \cdot N^3} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \cong \frac{(\mu mg)^2}{6k}$	0,25 p	
$L_{tracțiune} = \left\|L_{Ff}\right\| + \Delta E_{p\ elastică} = \frac{(\mu mg)^2}{3k}$	0,75 p	

Observație : Este punctat maxim și modul de calcul al lucrului mecanic al forței de frecare, astfel:



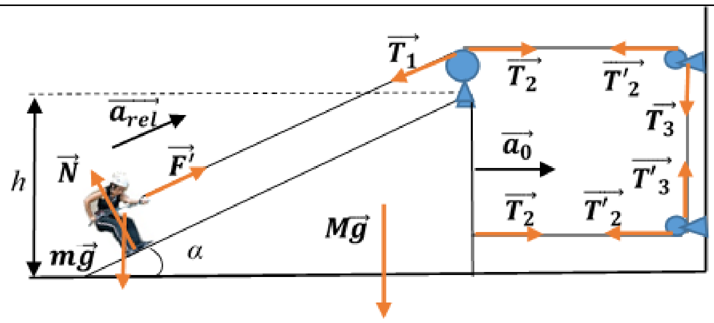
Deplasarea d_i a elementului i este

$$d_i = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \cdots \Delta l_i = \frac{\frac{\mu mg}{N}}{kN}(1 + 2 \ldots + i) = \frac{\mu mg}{kN^2} \frac{i(i+1)}{2}$$

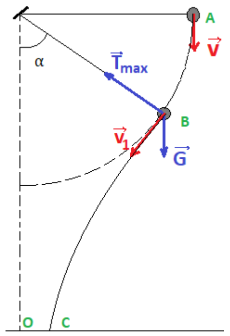
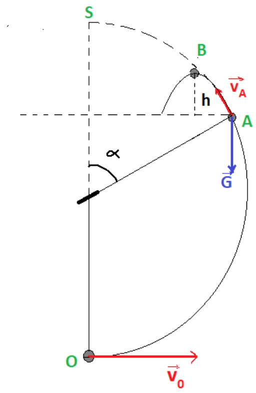
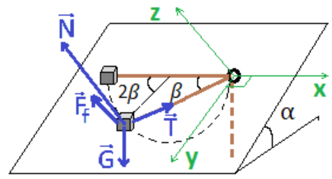
$$\left|L_{Ff}\right| = \sum_{i=1}^{N} F_{frecare-elementară} \cdot d_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu mg}{N} \cdot \frac{\mu mg}{kN^2} \frac{i(i+1)}{2}$$

$$\left|L_{Ff}\right| = \frac{\mu mg}{N} \cdot \frac{\mu mg}{kN^2} \frac{N(N+1)(N+2)}{2 \cdot 3} \cong \frac{(\mu mg)^2}{6k}$$

Subiectul II: În competiție! **(10 puncte)**

Subiectul II	Parțial	Punctaj
		
a. $F - mgsin\alpha = m(a_{rel} + a_0 cos\alpha)$	0,50 p	
$N - mgcos\alpha = -ma_0 sin\alpha$	0,50 p	
$F(2 - \cos\alpha) + Nsin\alpha = Ma_0$	0,50 p	**3,00 p**
$a_{rel} = \dfrac{F[M + m(1 - 2cos\alpha)] - m(M + m)gsin\alpha}{m(M + msin^2\alpha)}$	1,00 p	
$a_{rel} \geq 0 => F \geq \dfrac{m(M + m)gsin\alpha}{M + m(1 - 2cos\alpha)} = F_{min}$	0,50 p	
b. $v_0 = const => a_{rel} = 0$ deci $F = F_{min}$	0,50 p	
$a_0 = \dfrac{2mgsin\alpha}{M + m(1 - 2cos\alpha)}$	1,00 p	
$t_u = \dfrac{h}{v_0 sin\alpha}$	0,50 p	**3,00 p**
$v_1 = a_0 t_u$	0,50 p	
$v_1 = \dfrac{2gh}{v_0\left({}^{M}/{}_{m} + 1 - 2cos\alpha\right)}$	0,50 p	
c. $x = v_{0x} t$	0,50 p	
$y = h + v_{0y} t - g\, {}^{t^2}/{}_{2}$	0,50 p	
$y = 0 => x^2 - 2\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}x - 2\frac{hv_{0x}^2}{g} = 0$	0,50 p	
$x_{max} = \dfrac{v_{0x}v_{0y}}{g}\left(1 + \sqrt{1 + {}^{2gh}/{}_{v_{0y}^2}}\right)$	0,50 p	**4,00 p**
$v_{0x} = v_1 + v_0 cos\alpha$	0,50 p	
$v_{0y} = v_0 sin\alpha$	0,50 p	
$d = hctg\alpha + x_{max} + {}^{v_1 t_u}/{}_{2}$	0,50 p	
$d \cong 7{,}6\ m$	0,50 p	

Subiectul III: Mişcări circulare în câmp gravitațional **(10puncte)**

Subiectul III	Parțial	Punctaj
a.		
$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=mgL\cdot\cos\alpha$	1,00 p	**4,00 p**
$T_{max}-mg\cdot\cos\alpha=\frac{mv_1^2}{L}$	1,00 p	
$v_1t\cdot\cos\alpha=x$	0,50 p	
$v_1t\cdot\sin\ \alpha+\frac{gt^2}{2}=L(2-\cos\alpha)$	0,50 p	
$OC=\frac{L\sqrt{3}}{2}-x\cong 12\ cm$	1,00 p	
		
b.		
$\frac{mv_s^2}{2}-\frac{mv_{min}^2}{2}=-2mgl$	0,50 p	**3.50 p**
$mg=\frac{mv_S^2}{l}$	0,50 p	
$v_{min}=\sqrt{5gl}>v_0$	0,50 p	
$mg\cdot\cos\alpha=\frac{mv_A^2}{l}$	0,50 p	
$\frac{mv_A^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-mgl(1+\cos\alpha)$	0,50 p	
$h=\frac{(v_A\cdot\sin\alpha)^2}{2g}$	0,50 p	
$h_{max}=l(1+\cos\alpha)+h\cong 59\ cm$	0,50 p	
		
c.		
$(Ox): T\cdot\cos\beta-F_f\cdot\sin(2\beta)=0$	0,50 p	**2,50 p**
$(Oy): mg\cdot\sin\alpha-T\cdot\sin\beta-F_f\cdot\cos\ (2\beta)=0$	0,50 p	
$(Oz): N-mg\cdot\cos\alpha=0$	0,50 p	
$\mu=\frac{F_f}{N}=tg\ \alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\cong 0{,}58$	0,50 p	
$T=2mg\cdot(\sin\alpha)\cdot(\sin\beta)=0{,}1\ N$	0,50 p	
		

Barem de evaluare și de notare propus de:

Prof. Jean-Marius Rotaru, Colegiul Național Iași, Iași

Prof. Cristian Miu, Colegiul Național „Ion Minulescu”, Slatina

Prof. Gabriela Alexandru, Colegiul Național „Grigore Moisil”, București

Prof. dr. Alpár István Vita Vörös, Liceul Teoretic „Apáczai Csere János”, Cluj-Napoca

Prof. dr. Daniel Lazăr, Colegiul Național „Iancu de Hunedoara”, Hunedoara