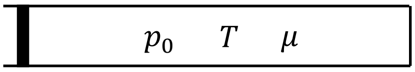
Problema 1

Unde mecanice (10 puncte)



Un cilindru orizontal, lung și subțire, închis la un capăt, conține un gaz ideal biatomic cu masa molară $\mu = 28\ g/mol$, la temperatura T și presiunea atmosferică p_0, separat de aerul atmosferic din exterior printr-un piston subțire care se poate mișca etanș și fără frecări. Pistonul se află la distanța l față de capătul închis și efectuează o mișcare oscilatorie liniar armonică, cu amplitudinea foarte mică A_0 și frecvența ν. În tub ia naștere o undă longitudinală al cărei front de undă se propagă cu viteza c.

a. Exprimați, în funcție de c și ν, distanțele x_{nod} și x_{ventru}, măsurate față de poziția de echilibru a pistonului, la care se obțin noduri, respectiv ventre de oscilație ale gazului din interiorul tubului; **(2p)**

b. Determinați expresia frecvenței primelor trei armonici de după frecvența fundamentală de oscilație a gazului din tub, în funcție de frecvența fundamentală ν_0; **(2p)**

c. Deduceți expresia $c = f(T)$ care dă dependența vitezei de propagare a frontului de undă al undei longitudinale care se produce în interiorul tubului de temperatura gazului, considerând că vibrația pistonului este foarte rapidă. Pe baza relației obținute calculați valoarea acestei viteze la temperatura $T = 300$ K. Se cunoaște constanta universală a gazelor ideale $R = 8{,}31\frac{J}{mol\cdot K}$; **(3p)**

d. Considerați acum că amplitudinea undei care pleacă de la piston în interiorul tubului scade cu distanța x până la piston după relația $A = A_0 e^{-bx}$, relație în care b este o constantă pozitivă. Determinați expresia $A_M = f(x)$ a amplitudinii oscilației unui punct oarecare M din interiorul tubului, rezultată prin compunerea undei directe cu prima undă reflectată la capătul închis al tubului. Se neglijează absorbția undei longitudinale la capătul închis al tubului.**(3p)**

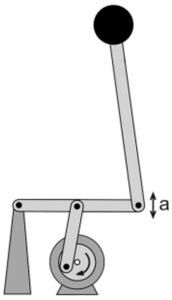
Dacă apreciați că este necesar puteți folosi aproximația $(1 \pm \varepsilon)^m \cong 1 \pm m\varepsilon$, *atunci când* $\varepsilon \ll 1$.

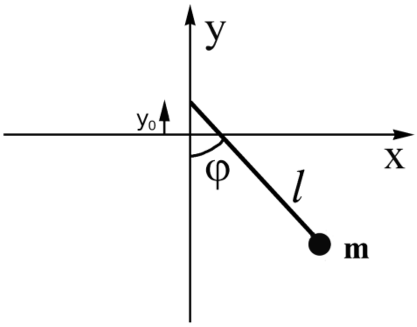
Problema 2

Pendul în echilibru dinamic (10 puncte)

O bună înțelegere a felului în care se poate atinge echilibrul sistemelor mecanice este de mare importanță în diverse ramuri ale tehnologiei. Ca exemplu, pentru fiecare dintre noi procesul „mersului pe jos” (extrem de complex, de altfel!) este perfect natural. În cadrul proiectării de roboți umanoizi însă, găsirea unei implementări cât mai eficiente a principiilor Fizicii pentru ca mașina să-și păstreze echilibrul în timpul mersului este o adevărată provocare. În cele ce urmează, vei analiza unul dintre cele mai simple modele care manifestă o stare de echilibru dinamic, și anume *pendulul Kapitza*.

Modelul constă dintr-un pendul fizic format dintr-o particulă de masă m conectată de punctul de sprijin printr-o tijă rigidă fără masă de lungime l**,** care se rotește liberă în jurul acestuia**.** Particularitatea situației este că punctul de sprijin este forțat să execute de-a lungul direcției verticale o mișcare oscilatorie de amplitudine $a \ll l$ și de pulsație foarte mare ω, $y_0(t) = a\cos(\omega t)$. O posibilă realizare practică a acestuia este prezentată în figura din stânga, geometria situației fiind descrisă în figura din dreapta. Notăm unghiul tijei față de verticală cu φ. Accelerația gravitațională este $\vec{g} = -g\vec{j}$.





a1. Sistemul are un singur grad de libertate, unghiul φ, configurația pendulului putând fi complet specificată în funcție de acesta. Exprimă coordonatele carteziene ale particulei, $x(t)$ și $y(t)$, ca funcții de unghiul $\varphi(t)$ și timp. **(1,5p)**

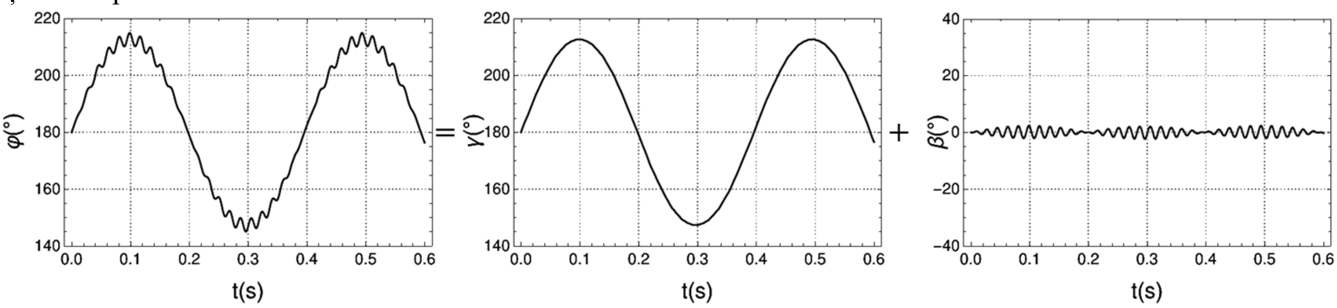
a2. Stabilește expresiile componentelor v_x și v_y ale vitezei particulei de-a lungul axelor Ox și Oy în termeni de viteza unghiulara $\frac{d\varphi}{dt}$ și timp. **(1,5p)**

a3. Determină expresiile energiilor cinetică și potențială ale particulei în termeni de unghiul φ, viteza unghiulara $\frac{d\varphi}{dt}$ și timp. **(2p)**

a4. Demonstrează că legea de mișcare a pendulului simplu în prezența mișcării forțate descrise de mai sus, pentru o valoare oarecare a unghiului φ este:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l}(g - a\,\omega^2\cos(\omega t))\sin\varphi. \ \textbf{(1p)}$$

În anumite condiții, pentru valori mici ale amplitudinii a și valori mari ale pulsației ω, soluția ecuației de la punctul precedent prezintă un comportament deosebit: mișcarea se comportă ca o suprapunere dintre o componentă γ care variază lent în timp și are amplitudine mare, și o altă componentă β care variază rapid în timp și are amplitudine mică:



Astfel se justifică abordarea bazată pe descompunerea $\varphi = \gamma + \beta$, unde $\gamma \gg \beta$, iar valoarea componentei lente γ poate fi considerată constantă pentru un număr suficient de perioade ale variabilei rapide β pentru evaluarea dinamicii acesteia din urmă.

b1) Arată că expresia componentei rapide $\beta = -\frac{a}{l}\sin\gamma\cos(\omega t)$, pentru o valoare arbitrară γ, este o soluție aproximativă a ecuației de mișcare de la punctul **a4,** în condițiile menționate mai sus. Consideră regimul în care g este neglijabil față de $a\omega^2$, cu alte cuvinte $a\omega^2 \gg g$. **(1p)**

b2) Combinând ecuația de mișcare de la punctul **a4** cu descompunerea $\varphi = \gamma + \beta$ și cu expresia de la punctul precedent, găsește ecuația pentru $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ care descrie dinamica componentei lente γ în urma medierii temporale peste oscilațiile rapide de pulsație mare ω, neglijând doar termenii de ordin a^n cu $n > 2$. Exprimă $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ în termeni de g, a, ω, l și γ. Poți simplifica expresia finală luând în considerare că $l\omega^2 \gg a\omega^2 \gg g$.
Poți folosi $\sin z \cong z, \cos z \cong 1 - \frac{z^2}{2}, z \ll 1\, rad$. **(1,8p)**

b3) Arată că ecuația de mișcare pentru γ, găsită la punctul anterior, poate fi dedusă din potențialul efectiv

$$V(\gamma) = -\frac{g}{l}\cos\gamma + \left(\frac{a\omega}{2l}\right)^2 sin^2\,\gamma$$

prin $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{dV}{d\gamma}$. **(0,2p)**

b4) Arată că pentru $(a\omega)^2 > 2gl$ acest potențial prezintă, pe lângă minimul $\gamma = 0$ care apare în cazul pendulului neforțat, un minim adițional $\gamma = \pi$, ambele corespunzând unor situații de echilibru stabil. Găsește coordonatele de poziție x și y corespunzătoare acestor două configurații. Justifică denumirea de *echilibru dinamic* pentru configurația $\gamma = \pi$. **(1p)**

Problema 3

Electroni în mișcare în câmp magnetic

Progresele recente ale nanotehnologiei au permis crearea de "atomi artificiali", așa numitele *puncte cuantice* (quantum dots). Acestea sunt structuri nanometrice care, datorită proprietăților optice și electronice, au posibilități de aplicare extrem de diversificate: de la calculatoare cuantice, celule solare și până la imagistica celulelor vii. În anumite condiții, cei câțiva electroni din cadrul acestor puncte cuantice pot fi considerați ca mișcându-se liber într-un câmp de potențial de tip oscilator armonic. În plus, dacă un punct cuantic este plasat într-un câmp magnetic extern, apar efecte fizice particulare.

În această problemă vei studia mai întâi mișcarea a doi electroni (cu masa m și sarcina $q = -e$) într-un plan perpendicular pe liniile unui câmp magnetic omogen de inducție $\vec{B} = B\vec{k}$. Electronii vor fi considerați puncte materiale a căror mișcare se produce numai sub acțiunea forțelor electrice (coulombiene) și magnetice în limita $v \ll c$. În cele din urmă vei analiza o posibilă mișcare clasică a doi electroni într-un punct cuantic.

a. Electronii se află inițial în repaus la o distanță d unul de altul. Acestora li se imprimă viteze egale ca mărime dar în sensuri contrare, ca în fig.1.:

a1. Scrie expresia legii a II-a a lui Newton pentru mișcarea unuia dintre electroni; **(1p)**

a2. Determină distanța minimă dintre cei doi electroni astfel ca, în timpul mișcării, aceasta să rămână constantă; **(1p)**

a3. Determină viteza imprimată electronilor în condițiile de la **a2**. **(1p)**

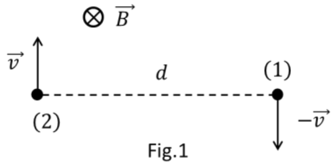


Fig.1

b. Electronii se află inițial în repaus la o distanță d unul de altul. Electronului (1) i se imprimă o viteză v_0, ca în fig.2 astfel ca, pe durata mișcării, distanța

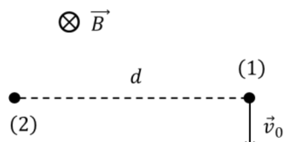


Fig.2

dintre cei doi electroni să fie egală cu $d = 2\sqrt[3]{\frac{mk}{B^2}}$ la orice moment de timp.Determină:

b1. Viteaza unghiulară a centrului de masă în timpul mişcării electronilor; **(1p)**

b2. Durata timpului scurs de la începerea mişcării după care cei doi electroni au pentru prima dată aceeași mărime a vitezei absolute. **(2p)**

c. Electronii se află inițial în repaus la o distanță d unul de altul. Acestora li se imprimă vitezele v_0 și v_{r0} , unde $v_0 \gg v_{r0}$, ca în fig.3.

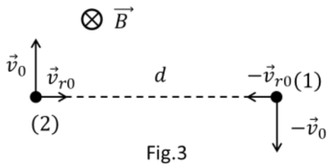


Fig.3

c1. Determină expresia energiei cinetice a unui electron, $E_c = E_c(m, v_r, \omega, r)$, unde $v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, iar r reprezintă poziția electronului în Sistemul Centrului de Masă (SCM); **(0,5p)**

c2. Determină expresia momentului cinetic orbital L al unui electron, care se mișcă în planul xOy, definit prin $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, unde $\vec{r}$ reprezintă vectorul de poziție al impulsului electronului $\vec{p}$; **(0,5p)**

c3. Deduceți că $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{eB}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2$ și arătați, în baza acestei relații, că momentul cinetic J, definit ca $J = L - \frac{eB}{2}r^2$, este constant în timp; **(1p)**

c4. Determină expresia vitezei unghiulare momentane ω a electronului în termeni de J, e, B, r și m și expresia energiei totale sub forma $E = E_c(v_r) + E_p(r)$; **(1p)**

c5. Analizează dependența de r a energiei potențiale $E_p(r) = \frac{m}{2}r^2\left(\frac{J}{mr^2} + \frac{eB}{2m}\right)^2 + k\frac{e^2}{r}$ și schițează calitativ graficul $E_p = E_p(r)$ și forma traiectoriei electronilor pentru o variație mică δr față de poziția de minim $r = r_0$. **(1p)**

Aceeași formă a energiei potențiale se regăsește în anumite condiții și în cazul punctelor cuantice (până la un termen care nu modifică analiza calitativă pe care ai dat-o la punctul anterior).

Probleme propuse de:
prof. Florin BUTUȘINĂ – Colegiul Național ”Simion Bărnuțiu”, *Șimleu-Silvaniei*
cercetător științific dr. Virgil V. BĂRAN – Facultatea de Fizică, Universitatea *București*
prof. Constantin GAVRILĂ – Colegiul Național ”Sfântul Sava”*, București*