BAREM DE CORECTARE → Clasa a X-a

Subiect 1 - MECANICĂ CLASICĂ	**Parțial**	**Punctaj**
Barem subiect 1		**10 puncte**
Problema 1. Mișcări …		**10 puncte**

a.) Mișcarea punctului material este uniform variată $\vec{a} = \vec{F}/m = \overrightarrow{const}$. Evident rectilinie nu poate fi deoarece aplicarea legii vitezei conduce la rezultate contradictorii. Prin urmare $\vec{a}$ (adică $\vec{F}$) și $\vec{v}_0$ au direcții diferite (suporturi diferite).

Din definiția accelerației $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$ rezultă $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}\cdot t$ **(1)** .... **0,50 p**

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\bullet\vec{v}} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{F\cdot t}{m}\right)^2 + 2\vec{v}_0 \bullet \frac{\vec{F}}{m}\cdot t}$. Notăm cu α unghiul dintre vectorii $\vec{F}$ și $\vec{v}_0$. Astfel rezultă

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{F\cdot t}{m}\right)^2 + 2\frac{F\cdot t}{m}v_0\cdot\cos\alpha} = v_0\sqrt{1 + \left(\frac{F\cdot t}{mv_0}\right)^2 + 2\frac{F\cdot t}{mv_0}\cdot\cos\alpha} \quad \textbf{(2)}$$ .... **1 p**

Din datele problemei: $|\vec{v}(\tau)| = v_0/2$, $|\vec{v}(2\tau)| = v_0/4$, rezultă

$$v_0^2\cdot\left[1 + \left(\frac{F\cdot\tau}{mv_0}\right)^2 + 2\frac{F\cdot\tau}{mv_0}\cdot\cos\alpha\right] = \frac{v_0^2}{4}, \qquad v_0^2\cdot\left[1 + 4\left(\frac{F\cdot\tau}{mv_0}\right)^2 + 4\frac{F\cdot\tau}{mv_0}\cdot\cos\alpha\right] = \frac{v_0^2}{16}$$

.... **1 p**

Din acest sistem de ecuații putem deduce $\cos\alpha$ și $\left(\frac{F\cdot\tau}{m\cdot v_0}\right)$. În mod concret obținem :

$\cos\alpha = -11\sqrt{2}/16 \Rightarrow \alpha = 166{,}48^0$, ... **0,50 p**

respectiv $\frac{F\cdot\tau}{mv_0} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$ . ... **0,50 p**

(total **a.)** 3,5 puncte)

b.) Folosind aceste rezultate în relația (2) obținem

$v(t) = v_0\sqrt{\frac{9}{32}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - \frac{33}{32}\left(\frac{t}{\tau}\right) + 1}$. **(3)** .... **0,40 p**

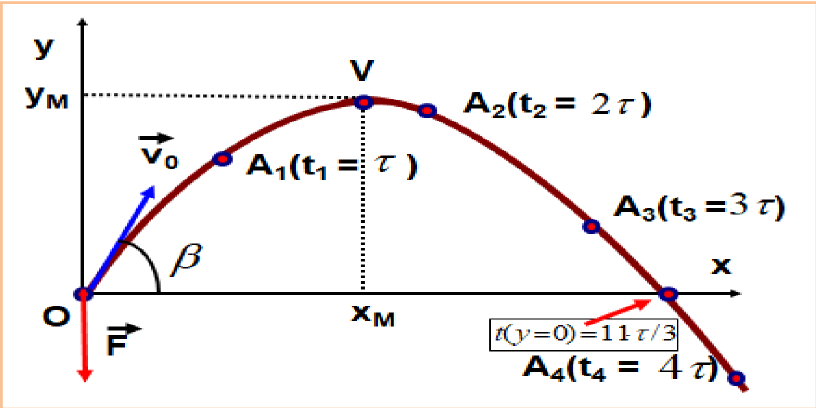
utilizând proprietățile trinomului de gradul al II-lea de sub radical , găsim că viteza minimă se atinge la momentul $t_m = 11\tau/6$. Ea este $v_{min.} = \sqrt{14}\cdot v_0/16$. **(4)** .... **0,60 p**

(total **b.)** 1 punct)

c.) În sitemul cartezian xOy având originea în locul de start al mobilului și axele Ox și Oy pe direcțiile indicate în enunț, putem scrie ecuațiile parametrice ale traiectoriei :

$$\begin{cases} x = v_0\cdot t\cdot\cos\beta = v_0\cdot t\cdot\sqrt{14}/16 \\ y = v_0\cdot t\cdot\sin\beta - \frac{F}{2m}\cdot t^2 = \frac{\sqrt{2}\cdot v_0\cdot t}{16}\left(11 - 3\cdot\frac{t}{\tau}\right) \end{cases}$$ **(5)** și **(6)** ....

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Eliminând timpul între relațiile (5) și (6) obținem ecuația traiectoriei (sub formă de ***parabolă***): $y = x\cdot \mathrm{tg}\beta - \frac{F}{2m}\cdot\frac{x^2}{v_0^2}(1+\mathrm{tg}^2\beta) = \frac{x}{\sqrt{7}}\left(11 - \frac{48.x}{v_0.\tau.\sqrt{14}}\right)$, unde $\beta = \alpha - 90^0$	**0,40 p**	
	**0,20 p**	
Traiectoria și pozițiile **A₁ , A₂ , A₃** și **A₄** localizate pe ea . ... Înlocuind momentele $t_n = n\cdot\tau$, cu $n = 1, 2, 3, 4$ în ecuațiile parametrice obținem: $t_1 = \tau \Rightarrow x_1 = v_0\cdot\tau\cdot\sqrt{14}/16;\ y_1 = v_0\cdot\tau\cdot\sqrt{2}/2$ $t_2 = 2\tau \Rightarrow x_2 = v_0\cdot\tau\cdot\sqrt{14}/8;\ y_2 = v_0\cdot\tau\cdot 5\sqrt{2}/8$ .... $t_3 = 3\tau \Rightarrow x_3 = v_0\cdot\tau\cdot 3\sqrt{14}/16;\ y_3 = v_0\cdot\tau\cdot 3\sqrt{2}/8$ $t_4 = 4\tau \Rightarrow x_4 = v_0\cdot\tau\cdot\sqrt{14}/4;\ y_4 = -v_0\cdot\tau\cdot\sqrt{2}/4$.	**0,60 p** (+desen)	**(total c.) 2 puncte)**
d.) $\cos\beta_n = \frac{\vec{v}_0\bullet\vec{v}_n}{v_0\cdot v_n}$, unde $\vec{v}_n = \vec{v}(n\cdot\tau) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}\cdot n\cdot\tau$ este viteza punctlului material la momentul $n\cdot\tau$	**0,80 p**	
Pe de altă parte $\vec{v}_0\bullet\vec{v}_n = v_0^2 + \frac{\vec{F}\bullet\vec{v}_0}{m}\cdot n\cdot\tau = v_0^2 + \frac{F\cdot\tau}{m\cdot v_0}v_0^2\cdot n\cdot\cos\alpha = v_0^2(1-33\cdot n/64)$ .... $v_n = \lvert\vec{v}\rvert(n\cdot\tau) = v_0\frac{\sqrt{9n^2-33n+32}}{4\sqrt{2}}$.	**0,75 p**	
În final: $\cos\beta_n = \frac{\sqrt{2}(64-33n)}{16\sqrt{9n^2-33n+32}}$	**0,25 p**	**(total d.) 2,30 puncte)**
Unghiurile cazurilor particulare sunt: $n=1 \Rightarrow \cos\beta_1 = 31/32;\ \beta_1 = 14{,}36^0$ $n=2 \Rightarrow \cos\beta_2 = -1/8;\ \beta_2 = 97{,}18^0$	**0,25 p**	
$n=3 \Rightarrow \cos\beta_3 = -5\sqrt{7}/16;\ \beta_3 = 145{,}77^0$ $n=4 \Rightarrow \cos\beta_4 = -17\sqrt{2}/(8\sqrt{11})\ \beta_4 = 154{,}97^0$. .... **e.)** În raport cu poziția inițială , legile mișcării celor două mobile sunt:	**0,25 p**	

$\vec{r}_1(t)=\vec{v}_0\cdot t+\frac{\vec{a}}{2}\cdot t^2=\vec{v}_0\cdot t+\frac{\vec{F}}{2m}\cdot t^2$ ....

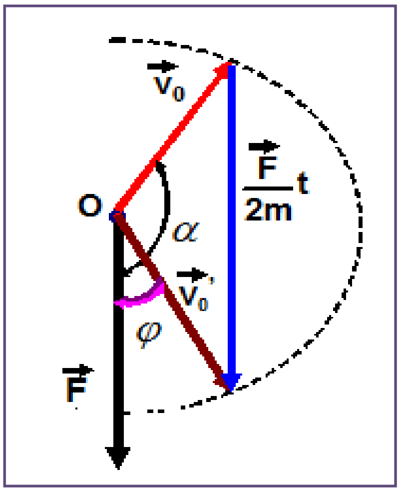
$\vec{r}_2(t)=\vec{v}_0\,'\cdot t$. .... **0,80 p**

Din condiția de întâlnire: $\vec{r}_1(t)=\vec{r}_2(t)$, găsim $t_1=0$ (evident!) și $\vec{v}_0\,'=\vec{v}_0+\frac{\vec{F}}{2m}\cdot t$ (*) ... **0,20 p**

Efectuând ***produsul scalar*** dintre vectorii $\vec{v}_0\,'$ și $\vec{F}$ obținem : **0,20 p**

$\vec{F}\bullet\vec{v}_0\,'=F\cdot v_0\cdot\cos\varphi=F\cdot v_0\cdot\cos\alpha+\frac{F^2}{2m}\cdot t$, deci **0,20 p**

$\cos\varphi=\cos\alpha+\frac{F}{2mv_0}\cdot t$ (**) ....



Ridicând la pătrat relația (*), obținem:

$v_0^2=v_0^2+\frac{F^2}{4m^2}\cdot t^2+\frac{F\cdot v_0}{m}\cdot t\cdot\cos\alpha$. Rezultă **0,20 p**

$t=-\frac{4mv_0\cdot\cos\alpha}{F\cdot\tau}\cdot\tau=\frac{22}{3}\tau$; $t=\frac{22}{3}\tau$.

....

Înlocuind în relația (2) găsim: $\cos\varphi=-\cos\alpha\Rightarrow\varphi=180^0-\alpha=13{,}52^0$. .... **0,20 p**

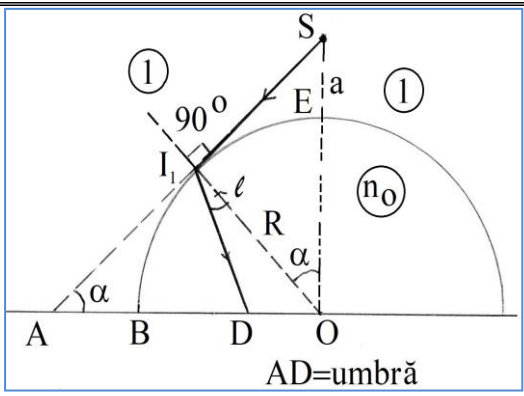
0,20 p

(total e.) 1,20 puncte)

Subiect 2 - OPTICĂ GEOMETRICĂ — 10 puncte

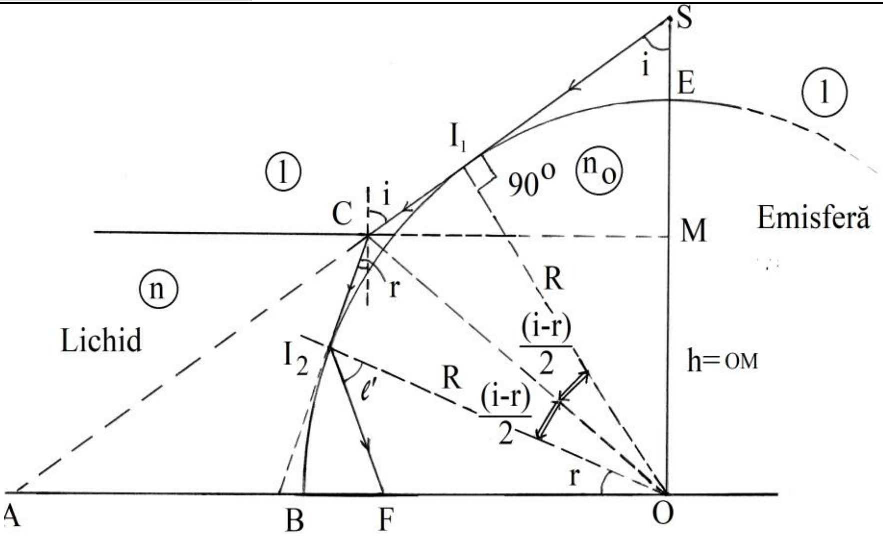
Problema 2. - Lumini și umbre

a.) Razele de lumină care pornesc de la sursa S sub unghiuri mai mici de $(90^0-\alpha)$ față de verticală , ajungând la suprafața emisferei vor suferi fenomenul de refracție și vor atinge suprafața orizontală pe care este așezată emisfera în puncte din interiorul discului de rază $r_2=OD$. Celelalte raze vor atinge suprafața orizontală în puncte situate în exteriorul discului de rază $r_1=OA$. .... **0,75 p (desen)** **0,25 p**



În ΔSI_1O, dreptunghic: $\cos\alpha = \frac{R}{R+a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$: Deci $\alpha = 45^0$;....................	**0,25 p**	
În ΔAI_1O dreptunghic: $\alpha = 45^0$; $\sin\alpha = \frac{R}{r_1}$, rezultă $R = r_1 \cdot \sin\alpha = 20\,\text{cm}$.	**0,25 p**	
Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul I_1DO avem: $\frac{\sin l}{r_2} = \frac{\sin(90^0+\alpha-l)}{R} \Leftrightarrow R\cdot\sin l = r_2\cdot\cos(\alpha-l)$.	**0,75 p**	
$\Leftrightarrow \frac{R}{r_2}\cdot\sin l = \cos\alpha\cdot\cos l + \sin\alpha\cdot\sin l$.	**0,25 p**	**(total a.) 4 puncte)**
Folosind $\alpha = 45^0$ și $\sin l = \frac{1}{n_0}$, ... din ecuația precedentă obținem:	**0,50 p**	
$n_0 = \sqrt{1+(r_1/r_2-1)^2}$	**0,75 p**	
Numeric $n_0 = 1{,}5$.	**0,25 p**	
b.) În $\Delta\, OI_1C$ dreptunghic, din a doua figură, putem scrie: $$CO = \frac{R}{\cos\left(\frac{i-r}{2}\right)}$$	**0,25 p**	
În $\Delta\, CMO$ dreptunghic în M: $$h = MO = CO\cdot\cos\left(\frac{i-r}{2}+90^0-i\right) = \frac{R}{\cos\left(\frac{i-r}{2}\right)}\cdot\cos\left(90^0-\frac{i+r}{2}\right) = R\cdot\frac{\sin\frac{i+r}{2}}{\cos\frac{i-r}{2}}.$$ ..	**1 p**	
	1 p (desen)	**(total b.) 4 puncte)**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.



0,75 p

0,25 p

0,25 p

0,50 p

De aici prin ridicare la pătrat găsim:

$$\left(\frac{h}{R}\right)^2=\frac{\sin^2\frac{i+r}{2}}{\cos^2\frac{i-r}{2}}=\frac{1-\cos(i+r)}{1+\cos(i-r)}=\frac{1+\sin i\cdot\sin r-\cos i\cdot\cos r}{1+\sin i\cdot\sin r+\cos i\cdot\cos r}$$ .... **0,50 p**

Pe de altă parte $i=90^0-\alpha=45^0$, iar $\sin r=\frac{\sin i}{n}\cong 0{,}54$ şi $\cos r\cong 0{,}84$. .... **0,50 p**

Deci : $h=R\cdot\sqrt{\frac{1+\sin i\cdot\sin r-\cos i\cdot\cos r}{1+\sin i\cdot\sin r+\cos i\cdot\cos r}}$ . ... **0,75 p**

Numeric: $h\cong 12{,}63\,\text{cm}$. .... **0,25 p**

c.) În $\Delta\ I_2FO$ în care OF=r_0 aplicarea teoremei sinusurilor conduce la:

$$\frac{\sin l'}{r_0}=\frac{\sin(r+l')}{R}$$; ....

Folosind $\sin l'=\frac{n}{n_0}$ şi $\sin r=\frac{\sin i}{n}$, ...

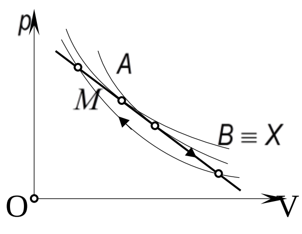
se obţine:

$$\frac{R}{r_0}\cdot\frac{n}{n_0}=\sin r\cdot\cos l'+\cos r\cdot\sin l' \quad\Leftrightarrow$$

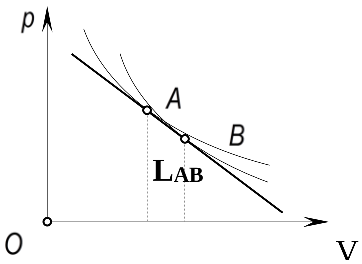
$$\frac{R}{r_0}\cdot\frac{n}{n_0}=\sqrt{1-\frac{n^2}{n_0^2}}\cdot\frac{\sin i}{n}+\sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}}\cdot\frac{n}{n_0}\Rightarrow r_0=\frac{n^2\cdot R}{\sqrt{n_0^2-n^2}\cdot\sin i+n\cdot\sqrt{n^2-\sin^2 i}}$$ ....

Înlocuind valorile cunoscute pentru i, n, n_0 şi R obţinem : $r_0\cong 17{,}5\,\text{cm}$ ....

(total c.) 2 puncte)

Subiect 3 - TERMODINAMICĂ *Problema 3. …Transformări termodinamice*		**10 puncte**
Rezolvare: a). Pentru a determina semnificaţia fizică a stării A, în care izoterma este tangentă la dreapta $p = p_0 - aV$, vom ţine cont că, cu cât temperatura este mai mare, izoterma corespunzătoare unei anumite mase de gaz se depărtează de axele de coordonate OV şi Op, precum și de originea O. Punctul A de pe dreaptă este punctul de pe transformarea: $p = p_0 - aV$, în care gazul atinge ***temperatura maximă***. ………………………………………………  În punctul B al dreptei ca și pe adiabata tangentă, capacitatea calorică $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = 0$. De aceea, între o stare situată pe transformarea: $p = p_0 - aV$, în stânga stării B şi starea B gazul primeşte căldură, iar între starea B şi o stare situată pe transformare în dreapta stării B gazul cedează căldură. ……………………………………………………………………………………	**0,25 p** **0,50 p** **0,25 p**	

Orice stare aparţinând transformării: p = p_0 – aV, verifică şi ecuaţia de stare a gazului ideal $pV = \nu RT$ şi atunci: $\nu RT = p_0V - aV^2$. **0,50 p**



Temperatura va fi maximă în starea A în care această funcţie de gradul al II – lea admite maxim, adică:

$$V_A = \frac{p_0}{2a} \quad \text{şi} \quad p_A = \frac{p_0}{2}$$ . ... **0,50 p**

Considerăm acum o stare oarecare X aparţinând transformării p = p_0 – aV, cu parametri de stare p, V, T, situată la dreapta stării **A.** În transformarea AX căldura schimbată cu exteriorul va fi:

$$Q_{AX} = \Delta U_{AX} + L_{AX} = \nu C_V(T - T_A) + \frac{1}{2}(p + p_A)(V - V_A),$$ .... **0,75 p**

unde lucrul mecanic a fost exprimat prin aria de sub graficul transformarii şi axa OV. Înlocuim aici $C_V = R/(\gamma - 1)$, $\nu RT = pV$, $\nu RT_A = p_AV_A$ şi $p = p_0 - aV$, în cele din urmă obţinem:

$$Q_{AX} = -\frac{a(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}V^2 + \frac{p_0\gamma}{\gamma-1}V + \frac{a(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}V_A^2 - \frac{p_0\gamma}{\gamma-1}V_A =$$ .... **0,50 p**

$$= -\frac{a(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}(V^2 - V_A^2) + \frac{p_0\gamma}{\gamma-1}(V - V_A)$$

Starea X coincide cu starea B, dacă această funcţie Q_{AX} de gradul II, este ***maximală***, adică pentru: $V_B = \frac{p_0\gamma}{a(\gamma+1)}$ şi corespunzător pentru $p_B = \frac{p_0}{\gamma+1}$. .... **0,25 p**

Comparând coordonatele celor două stări A şi B se observă că adiabata este totdeauna în aval faţă de izotermă, în sensul destinderii gazului.

Raportul cerut în enunţ este : $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\nu RT_A}{\nu RT_B} = \frac{p_AV_A}{p_BV_B}$. .... **0,25 p**

Înlocuind valorile determinate mai sus, obţinem:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma} > 1 \text{ deoarece } \frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma} > 1 \Leftrightarrow (\gamma-1)^2 > 0, \text{deoarece } \gamma > 1$$...

Transformarea liniară $p = p_0 - aV$ ***nu este o transformare politropă*** (în care căldura molară este constantă). De data aceasta, în procesul **A→B**, când volumul creşte, căldura molară este şi ea variabilă. Între stările A **şi** B, putem calcula o ***căldură molară medie:*** **0,50 p**

$$C_{AB} = \frac{Q_{AB}}{\nu(T_B - T_A)} = \frac{Q_{AB} \cdot R}{p_BV_B - p_AV_A}$$ .... **0,25 p**

Înlocuind $V = V_B$ în expresia lui Q_{AX}, obţinem

$$Q_{AB} = \frac{p_0^2}{8a}\frac{\gamma-1}{\gamma+1} > 0,$$ .... **0,50 p**

ceea ce înseamnă că în transformarea liniară AB gazul primeşte căldură.
Deoarece temperatura scade, **căldura molară medie** este **negativă**

(total a.) 5 puncte)

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$$C_{AB} = \frac{Q_{AB}\cdot R}{p_B V_B - p_A V_A} = -\frac{R}{2}\cdot\frac{\gamma+1}{\gamma-1} < 0\,. \text{ ....}$$

b). Ţinem cont de relaţia $V_1 + V_2 = p_0/a$, dată în enunţ, şi de faptul că $V_2 = V_3$. Multiplicând în ambele părţi cu diferenţa $(V_1 - V_3)$, rezultă că:

$$V_1^2 - V_3^2 = \frac{p_0}{a}(V_1 - V_3) \;\Leftrightarrow\; p_0 V_1 - aV_1^2 = p_0 V_3 - aV_3^2 \text{ ....}$$

1 p

Având în vedere că punctele 1 şi 3 se află pe dreapta $p = p_0 - aV$, obţinem imediat relaţia $p_1V_1 = p_3V_3$, echivalentă (în cazul gazelor ideale) cu egalitatea temperaturilor $T_1 = T_3$. Aşadar, avem raportul $T_3/T_1 = 1$. ....

1 p

(total b.) 2 puncte)

c). Toate stările de pe transformarea liniară $p = p_0 - aV$ verifică şi ecuaţia termică de stare a gazelor ideale. Astfel avem .

$$T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{(p_0 - aV)V}{\nu R}\,. \text{ ....}$$

0,50 p

Acest binom de gradul II realizează maximul pentru $p_A = p_0/2$, $V_A = p_0/(2a)$ şi

$$T_{max} = T_M = \frac{p_0^2}{4a\nu R}\,. \text{ ....}$$

0,50 p

Pentru transformarea izobară 1 – 2 putem scrie relaţia $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$.***Temperatura minimă*** pe ciclu fiind atinsă în starea 2, (cu $V_2 = V_3$) avem $T_2 = \dfrac{V_3}{V_1}T_1$, ...

0,50 p

În starea 1, putem scrie : $p_1 = p_0 - aV_1 = \dfrac{\nu RT_1}{V_1}$ ....

0,50 p

Ecuaţia de gradul II: $aV_1^2 - p_0V_1 + \nu RT_1 = 0$, $\Delta = p_0^2 - 4a\nu RT_1 > 0$, are soluţiile:

$$V_1 = \frac{p_0 + \sqrt{p_0^2 - 4a\nu RT_1}}{2a} \quad \text{şi} \quad V_3 = \frac{p_0 - \sqrt{p_0^2 - 4a\nu RT_1}}{2a}\,, \text{ ....}$$

0,50 p

(total c.) 3 puncte)

Aici am ţinut cont şi de relaţia: $V_1 + V_3 = p_0 / a$.

Temperatura maximă, stabilită anterior este $T_{Max.} = T_M = \dfrac{p_0^2}{4a\nu R}$, când $p_A = p_0/2$ şi $V_A = p_0/(2a)$.

Randamentul ciclului Carnot care ar funcţiona între temperaturile extreme ale ciclului este: $\eta_{Carnot} = 1 - \dfrac{T_{min.}}{T_{Max.}} = 1 - \dfrac{T_2}{T_M} = 1 - \dfrac{V_3}{V_1}\cdot\dfrac{T_1}{T_M} = 1 - \left(1 - \sqrt{1-n}\right)^2$

....

0,50 p

Barem propus de:
prof. univ. dr. **ULIU** Florea, Universitatea din Craiova;
prof. **MIU** Cristian, Colegiul Naţional “ Ion Minulescu ” din Slatina;

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

prof. **ANTONIE** Dumitru, Colegiul Tehnic Nr.2**,** Târgu – Jiu.