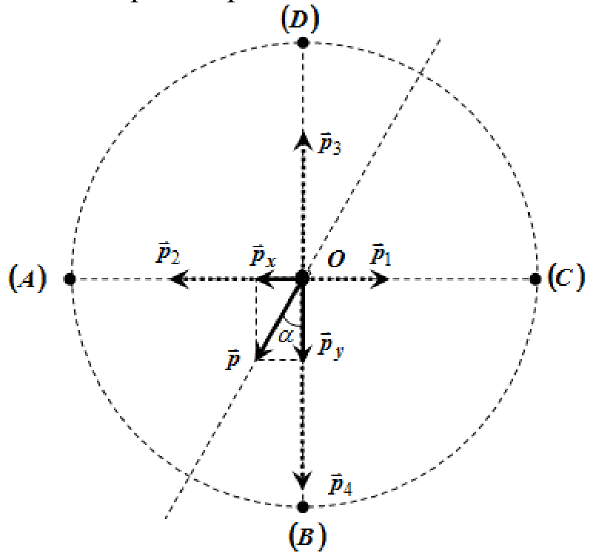
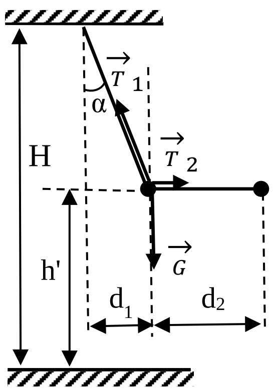
Problema I. Experimente cu ciocniri	Parţial	Punctaj
1. Barem subiect I		**10**
a. a) Vitezele corpurilor de mase m_i $(i=\overline{1,4})$, înainte de ciocnire, se determină din legea conservării energiei mecanice: $m_i g(h+R)=\frac{1}{2}m_i v_i^2 \Rightarrow \quad v_i = v = 2\sqrt{2gR}\,,\ (i=\overline{1,4})$ (1)	**1,00**	**4**
Vitezele înainte de ciocnire $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$, ale corpurilor de mase m_1 şi m_2, sunt egale în modul, dar au sensuri opuse. Considerând sens pozitiv sensul lui $\vec{v}_1$, rezultă că proiecţiile celor două viteze pot fi scrise astfel: $v_1 = v$ şi $v_2 = -v$. (2)	**0,50**	
Dacă două corpuri care se ciocnesc frontal perfect elastic au vitezele iniţiale $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$, iar după ciocnire vitezele lor $\vec{u}_1$ şi $\vec{u}_2$ sunt paralele cu vitezele iniţiale, atunci proiecţiile u_1 şi u_2 sunt date de relaţiile: $u_1 = 2\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}-v_1$ şi $u_2 = 2\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}-v_2$. (3)	**1,50**	
Folosind relaţiile (3) şi (4) împreună cu datele din enunţul problemei se obţine: $u_1 = -\frac{7}{5}v = -\frac{14}{5}\sqrt{2gR}$ şi $u_2 = \frac{3}{5}v = \frac{6}{5}\sqrt{2gR}$. (4)	**0,50**	
Înălţimile la care se vor ridica cele două corpuri sunt: $h_1 = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{1}{2g}\cdot\frac{49}{25}\cdot 8gR = \frac{196}{25}R = 7{,}84\,R$ şi $h_2 = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{1}{2g}\cdot\frac{9}{25}\cdot 8gR = \frac{36}{25}R = 1{,}44\,R$. (5)	**0,50**	
b. Vitezele corpurilor de mase m_3 şi m_4 înainte de ciocnire, $\vec{v}_3$ şi $\vec{v}_4$, sunt egale în modul şi au sensuri opuse. Considerând sens pozitiv sensul lui $\vec{v}_3$, rezultă că proiecţiile celor două viteze pot fi scrise astfel: $v_3 = v$ şi $v_4 = -v$. (6)	**0,50**	**3**
Ciocnirea fiind perfect plastică se aplică doar legea conservării impulsului şi, pentru viteza corpului rezultat din ciocnire, se obţine: $u = \frac{m_3-m_4}{m_3+m_4}\cdot v = \frac{2m-3m}{2m+3m}\cdot 2\sqrt{2gR} = -\frac{2}{5}\sqrt{2gR}$. (7)	**0,50**	
Corpul format prin ciocnirea plastică urcă la înălţimea $h_3 = \frac{u^2}{2g} = \frac{4}{25}R = 0{,}16R$ (8)	**1,00**	
Căldura degajată în urma ciocnirii este:		

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

<table>
<tr><td>$$Q=\frac{m_3v^2}{2}+\frac{m_4v^2}{2}-\left(\frac{m_3+m_4}{2}\right)\cdot u^2=\frac{96}{5}mgR=19{,}2mgR. \qquad (9)$$</td><td>1,00</td><td></td></tr>
<tr><td>c.
În figura următoare sunt reprezentate impulsurile celor 4 corpuri înainte de ciocnire ($\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ şi $\vec{p}_4$) şi impulsul $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3+\vec{p}_4$ al corpului rezultat din ciocnirea lor perfect plastică.
</td><td>0,50</td><td rowspan="7">3</td></tr>
<tr><td>Componentele p_x şi p_y ale impulsului $\vec{p}$ sunt:
$$p_x=mv-1{,}5mv=-0{,}5mv \text{ şi } p_y=2mv-3mv=-mv \qquad (10)$$</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>Viteza corpului rezultat din ciocnire este:
$$u=\frac{\sqrt{p_x^2+p_y^2}}{m_1+m_2+m_3+m_4}=\frac{\sqrt{1{,}25}}{7{,}5}v=\frac{2\sqrt{5}}{15}\sqrt{2gR} \qquad (11)$$</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>Corpul format prin ciocnirea plastică urcă la înălţimea
$$h_4=\frac{u^2}{2g}=\frac{4}{45}R \qquad (12)$$</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>Căldura degajată în urma ciocnirii este:
$$Q=\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{2}v^2-\left(\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{2}\right)\cdot u^2=\frac{88}{3}mgR. \ (13)$$</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>Unghiul dintre planul BOD şi planul în care se mişcă corpul format prin ciocnire este:
$$tg\alpha=\frac{p_x}{p_y}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=arctg\left(\frac{1}{2}\right)=26{,}56^0. \qquad (14)$$</td><td>0,50</td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

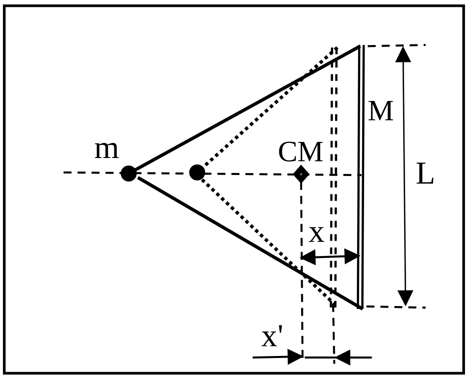
Problema II. Elasticitate și echilibru	Parțial	Punctaj
2. Barem subiect II		**10**
a. $\Delta\ell_1 = H - \ell_0 - h$ $mg = k_1(H - \ell_0 - h)$ k_1 fiind constanta elastică a porțiunii întinse a firului $k_1 = \frac{ES}{\frac{\ell_0}{2}}, k = \frac{ES}{\ell_0} \Rightarrow k = \frac{k_1}{2}$ $k = \frac{mg}{2(H - \ell_0 - h)}$ $k = 0{,}1\frac{N}{m}$	**0,50** **0,50** **0,50** **0,25** **0,25**	**2**
b. $\Delta\ell_1{}' = \frac{2mg}{k_1} = \frac{mg}{k}$ $\Delta\ell_2 = H - \ell_0 - \Delta\ell_1{}' = 5cm$ $k\ell_0 = k_x\left(\frac{\ell_0}{2} - x\right) \Rightarrow k_x = \frac{k\ell_0}{\frac{\ell_0}{2} - x}$ $mg = k_x \cdot \Delta\ell_2$ $x = \ell_0\left(\frac{1}{2} - \frac{k\Delta\ell_2}{mg}\right)$ $x = 30cm$	**0,50** **0,25** **0,50** **0,25** **0,25** **0,25**	**2**
c.  $T_1 cos\alpha = mg$ $T_1 = k_1 \cdot \Delta\ell_1{}''$ $\Delta\ell_1{}'' = \frac{H - h'}{cos\alpha} - \frac{\ell_0}{2}$ $cos\alpha = \frac{2\left(H - h' - \frac{mg}{2k}\right)}{\ell_0}$ $cos\alpha = \frac{11}{12} \Rightarrow sin\alpha = \frac{\sqrt{23}}{12}, tg\alpha = \frac{\sqrt{23}}{11}$ $d_1 = (H - h')tg\alpha$ $T_2 = T_1 sin\alpha = mg \cdot tg\alpha$ $d_2 = \frac{\ell_0}{4} + \Delta\ell_2' = \frac{\ell_0}{4} + \frac{T_2}{k_2} = \frac{\ell_0}{4} + \frac{mg \cdot tg\alpha}{4k}$ $d = d_1 + d_2 = \frac{\ell_0}{4} + \left(H - h' + \frac{mg}{4k}\right)tg\alpha$ $d = 60{,}5cm$	**0,25** **0,25** **0,25** **0,25** **0,25** **0,25** **0,50** **0,25** **0,25**	**2,5**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

d.

Din poziția inițială în care au fost eliberate corpurile (reprezentată cu linie continuă în figură) până în poziția în care firul devine netensionat (reprezentată cu linie întreruptă) corpurile se mișcă accelerat. În continuare se vor mișca uniform până în momentul ciocnirii. **0,25**

Deoarece, după eliberarea corpurilor, rezultanta forțelor externe ce acționează asupra corpului este nulă, rezultă că centrul de masă CM al sistemului biluță-tijă rămâne în repaus. **0,25**



x – distanța inițială a CM față de tijă

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{6}}{2}, \ell = \frac{\ell_0}{2} = 60cm$$

$$\frac{x}{h-x} = \frac{m}{M} \Rightarrow x = \frac{h}{5} = \frac{\ell\sqrt{6}}{10}$$ **0,25**

x' – distanța finală a CM față de tijă

$$h' = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

$$x' = \frac{h'}{5} = \frac{\ell\sqrt{2}}{10}$$ **0,25**

În timpul mișcării accelerate, deplasarea tijei este:

$$\Delta x_2 = x - x' = \frac{\ell\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{10}$$ **0,25**

$$\Delta x_2 = 6{,}21\ cm$$ **0,25**

În timpul mișcării accelerate, deplasarea biluței este:

$$\Delta x_1 = 4x - 4x' = 24{,}8\ cm$$ **0,25**

Deplasările uniforme ale celor două corpuri, până la ciocnirea lor în CM, sunt:

$$\Delta x_2' = x', \Delta x_1' = 4x'$$ **0,25**

Conservarea impulsului mecanic al sistemului:

$$0 = Mv_2 - mv_1 \ \Rightarrow\ v_1 = 4v_2$$ **0,25**

Conservarea energiei mecanice a sistemului:

$$2 \cdot \frac{k_1(\Delta\ell)^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}$$ **0,50**

unde

$$\Delta\ell = \ell\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Din cele două relații rezultă viteza constantă a tijei înaintea ciocnirii:

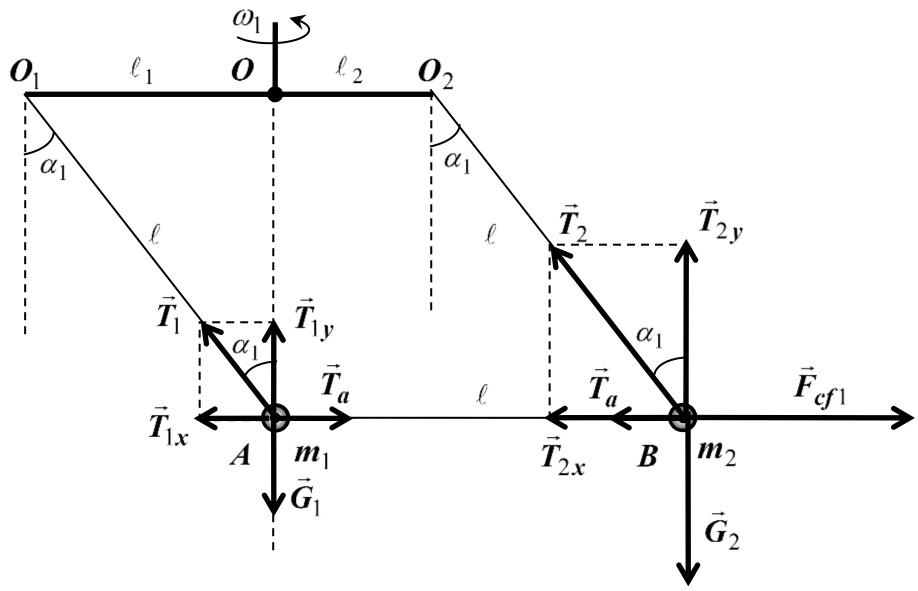
$$v_2 = \ell\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{k}{5m}}$$ **0,25**

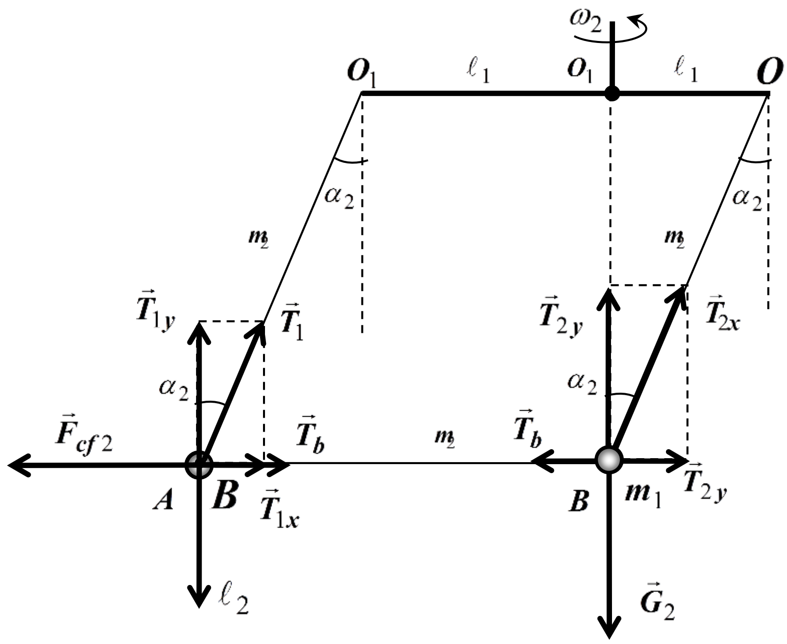
$$\Delta t = \frac{\Delta x_2'}{v_2} = \frac{1}{10\left(\sqrt{2}-1\right)} \cdot \sqrt{\frac{10m}{k}}$$ **0,25**

$$\Delta t = 0{,}1079s$$ **0,25**

Total: **3,5**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Problema III. Forțe de inerție	**Parțial**	**Punctaj**
3. Barem subiect III		**10**
a. Corpul de masă m_1 se află în repaus pe axa de rotaţie iar corpul de masă m_2 efectuează o mişcare circulară uniformă într-un plan orizontal, cu viteza unghiulară ω_1, pe un cerc având centrul în punctul A şi raza egală cu ℓ (Fig. 1).	**0,50**	
	**0,50**	**4**
Folosind condiţiile de echilibru la translaţie scrise pentru cele două corpuri se poate obţine relaţia: $(G_1+G_2)\cdot tg\alpha_1 = m_2\omega_1^2\ell$ (1)	**1,00**	
unde $tg\alpha_1 = \dfrac{\ell_1}{\sqrt{\ell^2-\ell_1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (2)	**0,50**	
Folosind relaţiile (1) şi (2) împreună cu datele din enunţ se obţine: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)\cdot g\cdot tg\alpha_1}{m_2\ell}} = \sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{5}}\dfrac{g}{\ell}}$ (3)	**0,50**	
Tensiunea din tija AB este: $T_a = T_{1x} = G_1\cdot tg\alpha_1 = \dfrac{2mg}{\sqrt{5}}$ (4)	**1,00**	
b. Corpul de masă m_2 se află în repaus pe axa de rotaţie iar corpul de masă m_1 efectuează o mişcare circulară uniformă într-un plan orizontal, cu viteza unghiulară ω_2, pe un cerc având centrul în punctul B şi raza egală cu ℓ (Fig. 2).	**0,50**	
Folosind condiţiile de echilibru la translaţie scrise pentru cele două corpuri se poate obţine relaţia: $(G_1+G_2)\cdot tg\alpha_2 = m_1\omega_2^2\ell$ (5)	**1,00**	**4**
unde $tg\alpha_2 = \dfrac{\ell_2}{\sqrt{\ell^2-\ell_2^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ (6)	**0,50**	

Folosind relaţiile (1) şi (2) împreună cu datele din enunţ se obţine: $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)\cdot g\cdot tg\alpha_2}{m_1\ell}} = \sqrt{\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\dfrac{g}{\ell}}$ (7)	**0,50**	
 Tensiunea din tija AB este: $T_b = T_{2x} = G_2\cdot tg\alpha_2 = \dfrac{mg}{\sqrt{2}}$ (8)	**0,50** **1,00**	
c. La coborârea liftului cu acceleraţia $a = g/2$, acceleraţia gravitaţională aparentă pentru observatorul “închis” în cabina liftului devine: $g_{ap} = g - a = \dfrac{g}{2}$. (9) Pe baza acestei observaţii vitezele unghiulare şi tensiunile din tija AB se pot obţine direct din relaţiile stabilite la punctele a) şi b) înlocuind g cu $g_{ap} = \dfrac{g}{2}$. $\omega_1' = \sqrt{\dfrac{3}{2\sqrt{5}}\dfrac{g}{\ell}}$; $T_a' = \dfrac{mg}{\sqrt{5}}$ şi (10) $\omega_2' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{2}}\dfrac{g}{\ell}}$; $T_b' = \dfrac{mg}{2\sqrt{2}}$ (11)	**1,00** **0,50** **0,50**	**2**

Barem propus de:
Prof. Petrică PLITAN, Colegiul Național „Gheorghe Șincai”, Baia Mare
Prof. Leonaș DUMITRAȘCU, Liceul „Ștefan Procopiu”, Vaslui

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.