Problema nr. 4 (10 puncte)

Oscilatii induse electric în sisteme macroscopice si microscopice

Dintre cele patru interacțiuni fundamentale, interacțiunea electrică și cea gravitațională sunt singurele întâlnite în lumea observabilă. Interacțiunea electrică este responsabilă și de un număr de fenomene oscilatorii apărute la diverse scale.

A. Pendul magnetic cu rezistență

Pendulul din figura 1 este construit dintr-o tijă conductoare rigidă de lungime ℓ, cu masa neglijabilă și dintr-un corp conductor de dimensiuni mici, cu masa m. Tija se poate roti în jurul punctului O, iar corpul conductor este în permanență în contact cu un conductor de forma unui semicerc, fixat în planul vertical care trece prin punctul O. Semicercul conductor, tija pendulului și corpul conductor împreună cu rezistorul R formează un circuit electric închis în care singura rezistență neneglijabilă este rezistența R a rezistorului. Circuitul se află într-un câmp magnetic omogen cu inducția $\vec{B}_0$, având liniile de câmp orizontale, perpendiculare pe planul circuitului. Mărimea accelerației gravitaționale este g.

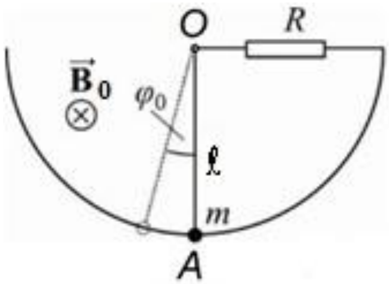

Figura 1

Pendulul este deviat cu un unghi φ_0 mic, față de poziția inițială de echilibru - marcată în figură cu A - și apoi este lăsat liber. În rezolvare, neglijează autoinducția și forțele de frecare și folosește următoarele notații: $\Omega = \sqrt{g/\ell}$ și $2\gamma = B_0^{\,2} \cdot \ell^2 / (4R \cdot m)$.

Sarcina de lucru nr. 1

1.a. Dedu ecuația de mișcare, ce descrie dependența de timp a unghiului $\varphi(t)$ de deviație tijei pendulului.

1.b. Determină expresia dependenței de timp $\varphi(t)$ a unghiului de deviație a pendului, pentru situația în care $B_0 < \sqrt[4]{\dfrac{64R^2 \cdot m^2 \cdot g}{\ell^5}}$.

1.c. Dacă numărul trecerilor pendulului prin poziția de echilibru este foarte mare, dedu expresia pentru intervalul de timp în care amplitudinea oscilației scade la jumătate din valoarea inițială.

B. Pendul magnetic cu condensator si arc spiralat

Consideră din nou tija conductoare rigidă cu masa neglijabilă, de lungime ℓ și corpul conductor de dimensiuni mici, având masa m. Corpul conductor este în permanență în contact cu un conductor de forma unui semicerc, fixat în planul vertical care trece prin punctul O.
Tija conductoare este fixată în punctul O de un ax orizontal, perpendicular pe planul semicercului. Axul se poate roti fără frecare în lagărele marcate în figură cu M și N. La capătul Q al axului este prins un arc spiral care are celălalt capăt fixat în punctul P. Arcul spiral este netensionat atunci când corpul cu masa m se află în poziția A. La rotirea axului arcul se tensionează; M_r - modulul momentului determinat de arcul spiral este proporțional cu unghiul de rotire al axului. Constanta de proporționalitate dintre moment și unghiul de rotire este β, iar energia potențială W_a acumulată în resortul spiral rotit cu unghiul φ are expresia:

$$W_a = \beta \cdot \varphi^2 / 2 \qquad (1)$$

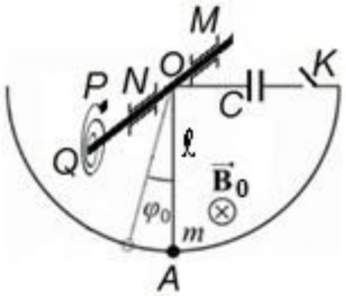

Figura 2

În circuitul electric al tijei, corpului și semicercului este plasat un condensator de capacitate C. Întreg dispozitivul se află într-un câmp magnetic omogen cu inducția $\vec{B}_0$, având liniile de câmp orizontale, paralele cu axul MN și perpendiculare pe planul semicercului conductor. Inițial condensatorul este descărcat, iar comutatorul K este deschis. Mărimea accelerației gravitaționale este g. Presupune că între armăturile condensatorului, liniile de câmp electric sunt perpendiculare pe plăci și câmpul electric este uniform.

Sarcina de lucru nr. 2

2.a. Dedu expresia dependenței de timp $\varphi(t)$ a unghiului de rotație, față de poziția inițială, în situația în care comutatorul K se închide și apoi, printr-o lovitura scurtă, se imprimă barei o viteză unghiulară inițială ω_0; ca urmare bara execută mici oscilații. Neglijează rezistența electrică a elementelor circuitului.

2.b. Determină condiția pe care trebuie să o îndeplineacă mărimile caracteristice ale sistemului analizat, astfel încât pendulul format din tijă și corpul conductor să descrie o mică oscilație armonică.

2.c. Dedu expresia dependenței de timp a mărimii sarcinii electrice de pe o armătură a condensatorului C, în situația specificată în cadrul sarcinii de lucru 2.a.

1. *Fiecare dintre subiecte se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.*
2. *În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.*
3. *Durata probei este de 5 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.*
4. *Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.*
5. *Fiecare subiect se punctează de la 10 la 0 (nu se acordă punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestor puncte.*

C. Molecula oscilantă de argon

Structura geometrică și proprietățile fizice ale moleculelor și solidelor sunt determinate de interacțiunile electrice dintre atomii care le constituie.

În cazul în care centrul sarcinii negative a unui atom se deplasează temporar față de centrul sarcinii sale pozitive, atomul devine un ansamblu legat de două sarcini electrice de mărime egală și de semne diferite (un dipol). Dacă doi astfel de atomi identici – dipoli temporari – se apropie unul de celălalt, atunci între ei apare o interacțiune inițial atractivă numită interacțiune Van der Waals. Molecula biatomică apărută prin interacțiunea Van der Waals are o energie potențială U, a cărei dependență de distanța r dintre atomi este dată de relația

$$U = U_0 \cdot \left[\left(\frac{R_0}{r} \right)^{12} - 2 \cdot \left(\frac{R_0}{r} \right)^{6} \right] \qquad (2)$$

În expresie, R_0 reprezintă distanța „de echilibru" dintre atomi, iar U_0 este o constantă.

Doi atomi de argon, având fiecare masa $m_{Ar} = 6{,}63 \times 10^{-26} kg$, pot forma o moleculă printr-o legătură slabă de tip Van der Waals. Pentru molecula de argon cunoști $R_0 = 3{,}82 \times 10^{-10} m$ și $U_0 = 1{,}68 \times 10^{-21} J$.

Sarcina de lucru nr. 3

3.a. Calculează valoarea energiei potențiale pentru sistemul celor doi atomi de argon, aflați la distanța de echilibru unul față de altul.

3.b. Dedu expresia forței care acționează asupra fiecăruia dintre cei doi atomi, atunci când distanța dintre aceștia este r.

3.c. Determină valoarea pulsației micilor oscilații ale fiecărui atom față de poziția de echilibru.

Ai în vedere că în cursul oscilațiilor mici fiecare dintre cei doi atomi se află la distanța $r/2 = R_0 \cdot (1 + x/R_0)/2$ față de centrul de masă al moleculei, că $|x/R_0| << 1$ și că $(x/R_0)^2 \cong 0$.

Dacă este cazul, ține seama că $(1 + a)^n \cong 1 + n \cdot a$, pentru $|a| << 1$.

© Subiect propus de:

Prof. dr. Delia DAVIDESCU
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI

FOAIE DE RĂSPUNSURI

Foaia de Răspunsuri se atașează la lucrare și nu se semnează

Evaluarea problemei se face pe baza soluției redactate pe Foaia de concurs

Problema nr. 4 (10 puncte)

Oscilatii induse electric în sisteme macroscopice si microscopice

A. Pendul magnetic cu rezistență

Sarcina de lucru nr. 1

1.a. Ecuația de mișcare, ce descrie dependența de timp a unghiului $\varphi(t)$ de deviație tijei pendulului	$\ddot{\varphi}+2\gamma\cdot\dot{\varphi}+\Omega^2\cdot\varphi=0$	1,50p
1.b. Expresia dependenței de timp ale unghiului $\varphi(t)$ de deviație a pendului, pentru situația în care $B_0<\sqrt[4]{\dfrac{64R^2\cdot m^2\cdot g}{\ell^5}}$	$\varphi(t)=\dfrac{\varphi_0\cdot\Omega\cdot e^{-\gamma\cdot t}}{\sqrt{\Omega^2-\gamma^2}}\cdot\left[\sin\left(\sqrt{\Omega^2-\gamma^2}\cdot t+\Phi\right)\right]$ $tg\,\Phi=\dfrac{\gamma}{\sqrt{\Omega^2-\gamma^2}}$	2,00p
1.c. Expresia pentru intervalul de timp în care amplitudinea oscilației scade la jumătate din valoarea inițială	$T_{1/2}=\dfrac{8\cdot R\cdot m\cdot\ln 2}{B_0{}^2\cdot\ell^2}$	0,50p

Sarcina de lucru nr. 2

2.a. Expresia dependenței de timp $\varphi(t)$ a unghiului de rotație față de poziția inițială

$$\varphi(t)=\frac{\omega_0\cdot\sqrt{m\cdot\ell^2+\dfrac{C\cdot B_0{}^2\cdot\ell^4}{4}}}{\sqrt{\beta+m\cdot g\cdot\ell}}\cdot\sin\sqrt{\frac{\beta+m\cdot g\cdot\ell}{m\cdot\ell^2+\dfrac{C\cdot B_0{}^2\cdot\ell^4}{4}}}\cdot t$$

2,50p

2.b. Condiția pe care trebuie să o îndeplinească mărimile caracteristice ale sistemului analizat, astfel încât acest sistem să descrie o mică oscilație armonică

$$\frac{\omega_0 \cdot \sqrt{m \cdot \ell^2 + \frac{C \cdot B_0{}^2 \cdot \ell^4}{4}}}{\sqrt{\beta + m \cdot g \cdot \ell}} \leq 0{,}1\ rad$$

0,50p

2.c. Expresia dependenței de timp a mărimii sarcinii electrice de pe o armătură a condensatorului C

$$Q(t) = \frac{C \cdot \ell^2 \cdot B_0}{2} \cdot \omega_0 \cdot \cos\sqrt{\frac{\beta + m \cdot g \cdot \ell}{m \cdot \ell^2 + \frac{C \cdot B_0{}^2 \cdot \ell^4}{4}}} \cdot t$$

0,50p

Sarcina de lucru nr. 3

3.a. Valoarea energiei potențiale pentru sistemul celor doi atomi de argon, aflați la distanța de echilibru unul față de altul

$$U(R_0) = -U_0$$

0,50p

3.b. Expresia forței care acționează asupra fiecăruia dintre cei doi atomi, atunci când distanța dintre aceștia este r

$$F(r) = \frac{12U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right]$$

1,00p

3.c. Valoarea pulsației micilor oscilații ale fiecărui atom față de poziția de echilibru

$$\omega = \frac{12}{R_0} \cdot \sqrt{\frac{U_0}{m_{Ar}}} \qquad \omega \cong 5{,}00 \times 10^{12}\ rad/s$$

1,00p