Baraj

Barem de evaluare

Se punctează în mod corespunzător oricare altă modalitate de rezolvare corectă a problemei

Problema a II-a

Partea I

1. În ipotezele formulate în problemă, numărul de molecule de gaz care părăsesc incinta 1, R_1, respectiv incinta 2, R_2, în unitatea de timp, depinde de concentrația moleculelor și de viteza lor medie:

$$R_1 \sim n_1 < v_1 >, \text{ respectiv } \ R_2 \sim n_2 < v_2 >,$$

iar fluxul net de molecule va fi:

$$\Delta R \sim n_1 < v_1 > - n_2 < v_2 >.$$

Deoarece $p \sim nT$ si $< v > \sim \sqrt{T}$, la momentul inițial acest flux poate fi exprimat ca:

$$\Delta R \sim \frac{p_0}{T_1}\sqrt{T_1} - \frac{p_0}{T_2}\sqrt{T_2} \sim p_0\left(\frac{1}{\sqrt{T_1}} - \frac{1}{\sqrt{T_2}}\right).$$

Deoarece $K_T>1$ (deci $T_1<T_2$), avem $\Delta R > 0$, deci fluxul de molecule este direcționat dinspre incinta rece (1) către cea caldă (2)!

La echilibru termodinamic fluxul net va fi zero:

$$\Delta R = 0.$$

.. 2 puncte

2. Notând cu N_1 și respectiv N_2 numărul de molecule în cele două incinte la echilibru termodinamic, condiția de flux nul implică $\frac{N_1}{V_1}\sqrt{T_1} = \frac{N_2}{V_2}\sqrt{T_2}$ sau $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\sqrt{K_T}}{K_V}$.

Legătura dintre numărul inițial de molecule din cele două incinte se obține exprimând presiunea inițială în funcție de aceste mărimi:

$$p_0 = \frac{N_1^0}{V_1}k_B T_1 = \frac{N_2^0}{V_2}k_B T_2,$$

de unde obținem:

$$\frac{N_1^0}{V_1}T_1 = \frac{N_2^0}{V_2}T_2 \ \text{ sau } \ \frac{N_1^0}{N_2^0} = \frac{K_T}{K_V},$$

iar numărul total de molecule din cele două incinte este:

$$N_{tot} = N_1^0 + N_2^0 = N_1 + N_2.$$

Fracțiunea din numărul total de molecule de gaz care trece din incinta 1 în incinta 2 până la stabilirea echilibrului termodinamic este:

$$\frac{N_1^0 - N_1}{N_{tot}} = \frac{K_V(K_T - \sqrt{K_T})}{(K_V + K_T)(K_V + \sqrt{K_T})}.$$

.. 1.5 puncte

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

3. Variația relativă a presiunii în incinta 1 este:

$$\frac{\Delta p_1}{p_0}=\frac{p_1-p_0}{p_0}=\frac{p_1}{p_0}-1=\frac{N_1}{N_1^0}-1=\frac{K_V(1-\sqrt{K_T})}{\sqrt{K_T}(K_V+\sqrt{K_T})}<0.$$

.... **0.5 puncte**

Variația relativă a presiunii în incinta 2 este:

$$\frac{\Delta p_2}{p_0}=\frac{p_2-p_0}{p_0}=\frac{p_2}{p_0}-1=\frac{N_2}{N_2^0}-1=\frac{\sqrt{K_T}(\sqrt{K_T}-1)}{(K_V+\sqrt{K_T})}>0,$$

.... **0.5 puncte**

iar diferența de presiune dintre cele două incinte la echilibru, raportată la presiunea inițială, este:

$$\frac{\Delta p}{p_0}=\frac{p_2-p_1}{p_0}=\frac{N_2}{N_2^0}-\frac{N_1}{N_1^0}=\frac{(\sqrt{K_T}-1)(K_V+K_T)}{\sqrt{K_T}(K_V+\sqrt{K_T})}>0.$$

.... **0.5 puncte**

Partea a II-a

1. La echilibru termodinamic, fluxul de particule care părăsesc incinta 1 trebuie sa fie egal cu fluxul de molecule care intră din incinta intermediară:

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}}=\frac{p}{\sqrt{T}}$$

și analog pentru incinta 2:

$$\frac{p_2}{\sqrt{T_2}}=\frac{p}{\sqrt{T}}.$$

.... **0.5 puncte**

Energia în incinta intermediară trebuie să fie constantă în timp, ceea ce implică faptul că rata totală a schimbului de energie dinspre incintele 1 și 2 către incinta intermediară și cea dintre incinta intermediară și incintele 1 și 2 să fie egale:

$$E_1+E_2=2E,$$

unde E reprezintă rata schimbului de energie dinspre incinta intermediară printr-unul dintre orificii.

Deoarece energia medie per moleculă este proporțională cu temperatura, putem scrie bilanțul energetic sub forma:

$$R_1T_1+R_2T_2=2RT$$

și după înlocuirea în funcție de presiuni obținem:

$$p_1\sqrt{T_1}+p_2\sqrt{T_2}=2p\sqrt{T}.$$

.... **0.5 puncte**

Înlocuind presiunile p_1și p_2 din bilanțurile fluxurilor în această relație obținem:

$$T=\frac{T_1+T_2}{2}\ \text{sau}\ \frac{T}{T_1}=\frac{1+K_T}{2}.$$

Din conservarea numărului de molecule în întregul sistem:

$$N_1^0+N_2^0=N_1+N_2+N.$$

obținem:

$$\frac{p_0V_1}{T_1}+\frac{p_0V_2}{T_2}=\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}+\frac{p\,V}{T}.$$

Înlocuind presiunile p_1și p_2 în funcție de p și tinând cont de condiția $V<<V_1,V_2$:

$$p = p_0 \frac{\left(K_V + K_T\right)\sqrt{1+K_T}}{\sqrt{2K_T}\,(K_V + \sqrt{K_T})} \text{ sau } \frac{p}{p_0} = \frac{\left(K_V + K_T\right)\sqrt{1+K_T}}{\sqrt{2K_T}\,(K_V + \sqrt{K_T})}.$$

... 1.5 puncte

2. În cazul în care incintele 1 şi 2 se consideră și rezervoare de presiune, egalizarea fluxurilor de molecule în și din incinta intermediară conduce la relația:

$$R_1 + R_2 = 2R,$$

unde factorul 2 apare din cauză că scurgerea de molecule din incinta intermediară se face prin două orificii identice.

Dacă ținem cont de dependența fluxurilor de molecule, de presiune și de temperatura, relația devine:

$$\frac{p_0}{\sqrt{T_1}} + \frac{p_0}{\sqrt{T_2}} = \frac{p_0}{\sqrt{T_1}} + \frac{p_0}{\sqrt{T_1}\sqrt{K_T}} = \frac{p_0}{\sqrt{T_1}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{K_T}}\right) = 2\frac{p}{\sqrt{T}}.$$

... 0.5 puncte

Condiția ca energia în incinta intermediară să fie constantă în timp, este:

$$E_1 + E_2 = 2E.$$

Deoarece energia medie per moleculă este proporțională cu temperatura, bilanțul energetic se scrie:

$$R_1T_1 + R_2T_2 = 2RT$$

și după înlocuirea în funcție de presiuni obținem:

$$p_0\sqrt{T_1} + p_0\sqrt{T_2} = p_0\sqrt{T_1}\left(1+\sqrt{K_T}\right) = 2p\sqrt{T}.$$

... 0.5 puncte

Din cele două ecuații de bilanț obtinem:

$$T = T_1\sqrt{K_T} \text{ sau } \frac{T}{T_1} = \sqrt{K_T}$$

și respectiv:

$$p = p_0\frac{1+\sqrt{K_T}}{2\sqrt[4]{K_T}} \text{ sau } \frac{p}{p_0} = \frac{1+\sqrt{K_T}}{2\sqrt[4]{K_T}}.$$

... 1.5 puncte

TOTAL: 10 puncte

© Barem de evaluare propus de:

Lector. Dr. A. NECULAE şi Asistent Dr. G. PASCU

Facultatea de Fizică, Universitatea de Vest din Timişoara