

### Problema I (10 puncte)

#### Giroscopul optic

Giroscopul optic, a cărui construcție se bazează pe o observație a lui Georges Sagnac din anul 1913, este un dispozitiv care permite determinarea cu mare precizie a vitezei unghiulare de rotație a platformei pe care este montat. Giroscopul optic este un dispozitiv cu rol esențial pentru navele spațiale, sateliți și avioane și este utilizat în multe alte aplicații civile și militare.

#### A. Giroscopul cu fibră optică

Principiul de funcționare a giroscopului cu fibră optică se bazează pe efectul Sagnac. Acesta constă în apariția unei diferențe de fază între două fascicule coerente de lumină, care se propagă în sensuri opuse printr-un inel din fibră optică, aflat în rotație.

În figura 1 este prezentată schița unui giroscop cu fibră optică. Un fascicul de lumină monocromatică pătrunde prin fanta  $P$ , într-o fibră optică de forma unui inel circular cu raza  $R$ , situată pe o platformă ce se rotește în sensul acelor de ceasornic cu viteza unghiulară constantă  $\Omega$ . În  $P$ , fasciculul de lumină este divizat în două fascicule ce se propagă în sensuri opuse. Lungimea de undă în vid a radiației luminoase utilizate este  $\lambda$ , iar indicele de refracție al materialului din care este confecționată fibra optică este  $n$ . Presupune că în interiorul fibrei optice traiectoria luminii are forma unui cerc de rază  $R$ .

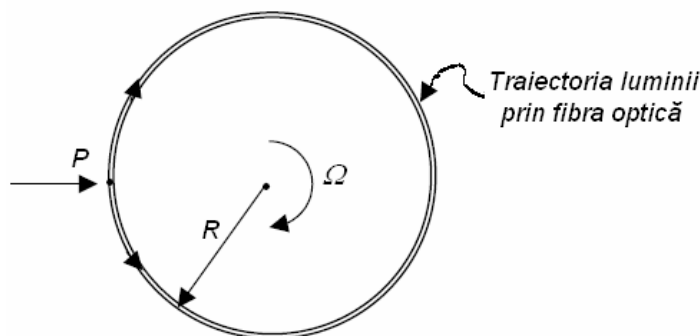


Figura 1 – Giroscop cu fibră optică

#### Sarcina de lucru nr. 1

Ține cont că viteza tangențială a fibrei optice din componența giroscopului este mult mai mică decât viteza  $c$  a luminii în vid și că, prin urmare,  $(R\Omega)^2 \ll c^2$ . Notează cu  $t^+$  intervalul de timp după care fasciculul de lumină ce se propagă prin fibra optică, în sensul acelor de ceasornic, revine prima dată în  $P$ . Notează cu  $t^-$  intervalul de timp după care fasciculul de lumină ce se propagă prin fibra optică, în sens invers acelor de ceasornic, revine prima dată în  $P$ .

Exprimă, după caz, rezultatele pe care le obții în cadrul sarcinii de lucru 1, în funcție de viteza  $c$  de propagare a luminii în vid, de indicele de refracție  $n$ , de raza  $R$  și de viteza unghiulară  $\Omega$  a platformei pe care este situată fibra optică.

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele a, b, respectiv c.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

1.a. Dedu expresia intervalului de timp  $\Delta t = t^+ - t^-$ .

1.b. Determină expresia diferenței de drum optic ( $\Delta L$ ) dintre cele două fascicule de lumină care se propagă în sensuri opuse prin fibra optică, corespunzătoare intervalului de timp  $\Delta t$ , dedus în cadrul sarcinii de lucru 1.a.

1.c. Calculează valoarea maximă a diferenței de drum optic dintre cele două fascicule de lumină, pentru o fibră circulară cu raza  $R = 1,0 m$  și indice de refracție  $n = 1,5$ , situată pe suprafața Pământului.

### Sarcina de lucru nr. 2

Diferența de drum optic exprimată în cadrul sarcinii de lucru 1.b. poate dobândi o valoare mai mare, dacă, în locul unei singure spire se utilizează un cadru circular de rază  $R$ , confecționat din fibră optică, cu  $N$  spire (figura 1). Consideră că lumina ce pătrunde în cadru circular prin fanta  $P$ , se divizează în două fascicule și că acest cadru se rotește uniform în sensul acelor de ceasornic cu viteza unghiulară  $\Omega$ , în jurul unui ax perpendicular pe planul spirelor, în centrul acestora.

2.a. Determină expresia diferenței de fază  $\Delta\varphi$  a celor două fascicule de lumină, apărută din momentul intrării luminii prin fanta  $P$ , până la revenirea acestor fascicule prima dată în  $P$ . Exprimă rezultatul în funcție de viteza  $c$  de propagare a luminii în vid, de indicele de refracție  $n$ , de raza  $R$ , de viteza unghiulară  $\Omega$  a platformei și de lungimea de undă în vid  $\lambda$  a radiației luminoase utilizate.

### B. Giroscopul cu fascicul laser

Giroscopul cu fascicul laser (figura 2) poate fi realizat prin includerea unei cavități active laser în conturul sub formă de triunghi echilateral  $O_1O_2O_3$ . Sursa laser generează două fascicule coerente, ce se propagă în sensuri opuse prin conturul triunghiular  $O_1O_2O_3$ , caracterizat prin perimetrul  $L$ .

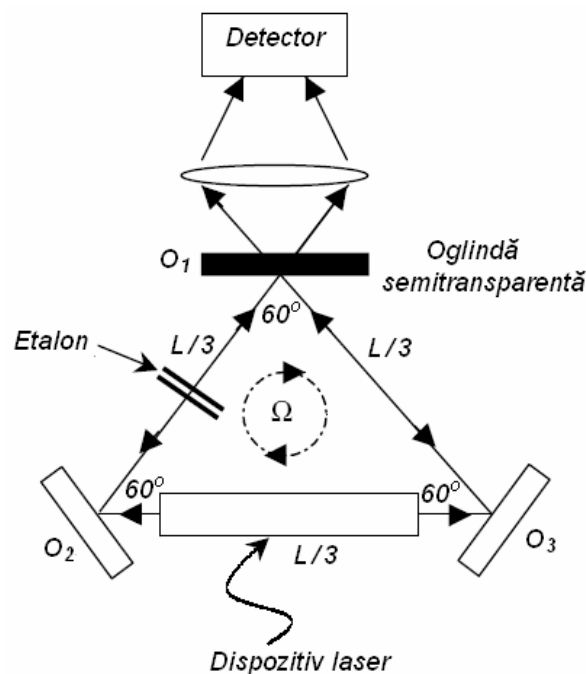


Figura 2 –Giroscop cu fascicul laser

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele a, b, respectiv c.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Dacă sistemul se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\Omega$ , în jurul unui ax perpendicular pe planul triunghiului, în centrul acestuia, atunci apare o diferență de fază între cele două fascicule ce se propagă în sensuri opuse. Pentru ca oscilațiile laser să se mențină în conturul triunghiular, este necesar ca perimetrul conturului să fie un multiplu întreg de lungimi de undă pentru radiația utilizată. Sistemul laser-oglinzi  $O_1O_2O_3$  formează o cavitate rezonantă, în care tehnic se permite (prin intermediul dispozitivului notat „Etalon” în figura 2) apariția undelor staționare.

### *Sarcina de lucru nr. 3*

În cadrul sarcinii de lucru 3 ți se cere să deduci expresia pentru intervalului de timp  $\Delta t$  pentru cazul conturului triunghiular, precum și expresia pentru frecvența bătăilor generate de cele două fascicule laser ce se propagă în sensuri opuse prin giroscop. Exprimă, după caz, rezultatele obținute în funcție de viteza  $c$  de propagare a radiației laser, de viteza unghiulară  $\Omega$  a platformei, de perimetrul  $L$  al conturului și de lungimea de undă  $\lambda$  a radiației laser în vid.

**3.a.** Utilizând același tip de notații ca cele menționate la sarcina de lucru nr.1, determină expresia intervalului de timp  $\Delta t = |t^+ - t^-|$ , pentru cazul conturului triunghiular  $O_1O_2O_3$ .

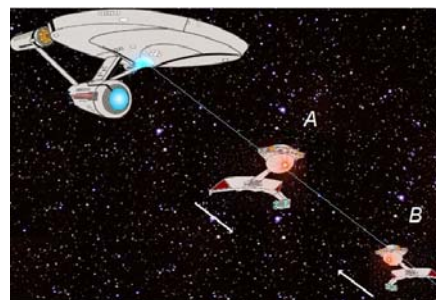
**3.b.** Dedu expresia pentru frecvența bătăilor generate de cele două fascicule laser ce se propagă în sensuri opuse prin giroscop (*formula lui Sagnac pentru rezonatori activi*).

### *Problema a II-a (10 puncte)*

#### *Star Trek*

### *Sarcina de lucru nr. 1*

De la pupitrul de supraveghere din nava stelară SS Enterprise, un controlor de zbor observă navele Shuttle A și Shuttle B, deplasându-se una către cealaltă, de-a lungul unei traiectorii liniare comune, de coliziune. Pe axa  $Ox$  a sistemului de coordonate care are în origine nava SS Enterprise, pozițiile navetelor la începutul observației sunt respectiv  $x_A$  și  $x_B$ ,  $0 < x_A < x_B$ .



Observate în sistemul referință al navei SS Enterprise, mărimile vitezelor constante ale celor două nave A și B sunt  $v_A = \alpha \cdot c$  și respectiv  $v_B = \beta \cdot c$ . Naveta A se îndepărtează de SS Enterprise, iar naveta B se apropie de nava stelară. Cunoști că  $\alpha$  și  $\beta$  sunt cantități pozitive, subunitare și că  $c$  este viteza luminii în vid.

**1.a.** Dedu expresia vitezei cu care naveta B se apropie de naveta A, în sistemul de referință al navei A.

**1.b.** Determină, în sistemul de referință al navei SS Enterprise, expresia intervalului de timp scurs din momentul observării navetelor de către controlorul de trafic, până în momentul când s-ar produce coliziunea acestora.

### *Sarcina de lucru nr. 2*

Navetele E și F sunt propulsate de motoare rachetă. Pentru ambele nave, jetul de gaze rezultate din arderea combustibilului este „aruncat în spate” cu o viteză relativă  $-u$ , față de navetă. Consideră că viteza relativă are mărimea constantă și mult mai mică decât viteza luminii în vid,  $0 < u \ll c$ .

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele a, b, respectiv c.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

În momentul în care motorul navei E a început să funcționeze, naveta se deplasa cu viteza  $V_{E,0} = \varepsilon \cdot c$  (cu  $0 < \varepsilon < 0,1$ ) în raport cu sistemul de referință al navei SS Enterprise și avea masa  $m_0$ .

În momentul în care motorul navei F a început să funcționeze, această navetă se deplasa cu viteza  $V_{F,0} = \varphi \cdot c$  (cu  $0,3 < \varphi < 0,5$ ) în raport cu sistemul de referință al navei SS Enterprise și avea masa  $m_0$ .

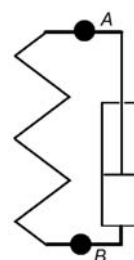
**2.a.** Determină expresia masei  $m$  a navei E,  $m < m_0$ , ca funcție de viteza sa  $V_E(t)$ , în sistemul navei SS Enterprise, pentru domeniul  $m_0 \geq m \geq 0,9 \cdot m_0$ .

**2.b.** Dedu, în sistemul navei SS Enterprise, modul în care viteza  $V_F(t)$  a navei F depinde de masa sa  $m$ , dacă masa inițială a navei este  $m_0$ .

### Problema a III-a (20 puncte)

#### Suspensia unui automobil

La un automobil caroseria este cuplată cu roțile prin patru suspensii identice. Fiecare suspensie este compusă dintr-un arc și un amortizor (un piston care culisează într-un cilindru umplut cu ulei) – ca în figura alăturată. O suspensie este cuplată la caroserie în punctul A și la axul roții în punctul B. Greutatea  $G$  a caroseriei (inclusiv pasagerii) este repartizată uniform pe cele patru suspensii. Presupune că suspensiile sunt întotdeauna verticale și că mișcările lor sunt absolut identice.



Un arc este caracterizat de lungimea sa nedeformată  $\ell_0$  și de constanta de elasticitate  $k$ . Amortizorul se opune mișcărilor care l-ar comprima sau l-ar întinde cu o forță de mărime  $F = h \cdot \frac{d\ell}{dt}$ , proporțională cu viteza de variație a lungimii  $\ell$  a suspensiei.

În această problemă îți sunt prezentate rezultatele unor măsurări referitoare la mișcarea pe verticală a automobilului în diferite situații și îți se cere să caracterizezi sistemul de suspensie.

#### Sarcina de lucru nr. 1

Din automobilul staționat coboară pe rând, la intervale de timp egale,  $t = 120s$ , cei cinci pasageri.

Datele din tabelul 1 se referă la înălțimea  $a$  față de sol a podelei caroseriei pe măsură ce pasagerii coboară. În acest tabel,  $N$  reprezintă numărul de pasageri, iar  $a$  reprezintă distanța de la podeaua caroseriei (presupusă plană și orizontală) până la sol.

Tabelul 1

N	5	4	3	2	1	0
$a$ [cm]	20,0	21,2	22,0	22,5	23,1	24,3

Masa caroseriei (inclusiv a pasagerilor) are valoarea  $M = 2000 kg$ , iar pasagerii au respectiv masele de  $40kg, 50kg, 60kg, 100kg$  și  $100kg$ . Accelerația gravitațională are valoarea  $g = 10 m \cdot s^{-2}$ .

**1.a.** Folosind o reprezentare grafică adecvată, determină constanta de elasticitate a arcului unei suspensii.

**1.b.** Determină valoarea lungimii nedeformate a arcului, dacă în automobilul cu pasageri arcul are o lungime egală cu jumătate din lungimea sa nedeformată.

- Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
- În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele a, b, respectiv c.
- Durata probei este de 4 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
- Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
- Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

1.c. Estimează perioada de oscilație a suspensiei, dacă amortizorul este defect ( $h = 0$ ) și toți pasagerii sunt în automobil.

### Sarcina de lucru nr. 2

Un oscilator este alcătuit dintr-un resort cu constanta de elasticitate  $k$  și cu masă neglijabilă și un corp cu masa  $M$  care deplasează pe orizontală. Mișcarea acestui ansamblu este atenuată de o forță proporțională cu viteza,  $F = hv$ .

Corelația dintre poziția corpului cu masa  $M$  și timp este descrisă de

$$M \cdot \ddot{x} + h \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \quad (1)$$

Ecuția algebrică atașată este

$$M \cdot r^2 + h \cdot r + k = 0 \quad (2)$$

și are soluțiile

$$r = \frac{-h \pm i\sqrt{4kM - h^2}}{2M} = -\frac{h}{2M} \pm i\sqrt{\frac{k}{M} - \frac{h^2}{4M^2}} \quad (3)$$

Soluția ecuației de mișcare a acestui oscilator este

$$x(t) = A \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M} - \frac{h^2}{4M^2}} \cdot t - \varphi\right) = A \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \quad (4)$$

Mișcarea pe verticală a caroseriei automobilului este o mișcare cvasiperiodică. La intervale de timp multiplu ale unei „perioade”  $T$ , caroseria atinge maxime locale, cu valori în scădere, ale elongației (dacă faza inițială a oscilației este nulă).

În tabelul 2 sunt specificate câteva „amplitudini” succesive ale oscilațiilor caroseriei.

Tabelul 2

Timpul [T]	0	1	2
Elongațiile maxime [cm]	20,0	2,7	0,4

2.a. Folosind o reprezentare grafică adecvată, determină valoarea coeficientului  $h$  al amortizorului din compunerea suspensiei.

Pentru o anumită valoare a coeficientului de atenuare, suspensia nu mai oscilează și arcul „se târâie” către poziția de echilibru.

2.b. Determină valoarea coeficientului de atenuare  $h_s$  care permite această „stingere” a oscilațiilor caroseriei.

© Subiect propus de:

Prof. Dr. Delia DAVIDESCU

Prof. Dr. Mihai DAFINEI

Conf. univ. Dr. Adrian DAFINEI

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele a, b, respectiv c.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

FOAIE DE RĂSPUNSURI

*Problema I (10 puncte)*

*Giroscopul optic*

*A. Giroscopul cu fibră optică*

*Sarcina de lucru nr. 1*

1.a. Expresia intervalului de timp  $\Delta t = t^+ - t^-$

2,00p

1.b. Expresia diferenței de drum optic ( $\Delta L$ ) dintre cele două fascicule de lumină care se propagă în sensuri opuse prin fibra optică

1,00p

1.c. Valoarea numerică maximă a diferenței de drum optic dintre cele două fascicule de lumină

1,00p

*Sarcina de lucru nr. 2*

2.a. Expresia diferenței de fază  $\Delta\varphi$  corespunzătoare celor două fascicule de lumină

1,00p

*B. Giroscopul cu fascicul laser*

*Sarcina de lucru nr. 3*

3.a. Expresia intervalului de timp  $\Delta t = t^+ - t^-$ , pentru cazul conturului triunghiular  $O_1 O_2 O_3$

2,00p

3.b. Expresia pentru frecvența bătailor generate de cele două fascicule laser ce se propagă în sensuri opuse prin giroscop

2,00p

Oficiu 1,00p

*Problema a II-a (10 puncte)*

*Star Trek*

*Sarcina de lucru nr. 1*

**1.a.** Expresia vitezei cu care naveta B se apropie de naveta A, în sistemul de referință al navei A

2,00p

**1.b.** Expresia, în sistemul de referință al navei SS Enterprise, pentru intervalul de timp scurs din momentul observării navetelor de către controlorul de trafic până când s-ar produce coliziunea acestora

1,00p

*Sarcina de lucru nr. 2*

**2.a.** Expresia masei  $m$  a navei E,  $m < m_0$ , ca funcție de viteza sa  $V_E(t)$ , în sistemul navei SS Enterprise

3,00p

**2.b.** Dependența vitezei navei F de masă, în sistemul navei SS Enterprise

3,00p

Oficiu 1,00p

*Problema a III-a (20 puncte)*

*Suspensia unui automobil*

*Sarcina de lucru nr. 1*

**1.a.** Constanta de elasticitate a arcului unei suspensii

6,00p

**1.b.** Valoarea lungimii nedeformate a arcului

4,00p

**1.c.** Estimarea perioadei de oscilație a suspensiei

2,00p

*Sarcina de lucru nr. 2*

**2.a.** Valoarea coeficientului  $h$  al amortizorului din compunerea suspensiei

5,00p

**2.b.** Valoarea coeficientului de atenuare  $h_s$  care permite „stingerea” oscilațiilor caroseriei

2,00p

Oficiu 1,00p