Problema a II-a (10 puncte)

Diferite sărituri

Această problemă îți propune să efectuezi un studiu al câtorva tipuri de sărituri, utilizând o modelare simplă, în care fiecare persoană care execută o săritură este asimilabilă unui punct material. În rezolvarea tuturor cerințelor, consideră că forțele de frecare cu aerul sunt neglijabile.

Sarcina de lucru nr. 1 – Săritura pe verticală în jos

Ioana efectuează o săritură de la înălțimea h şi aterizează pe ambele picioare, pe o porțiune cu pământ uscat (figura 1). Presupune că viteza inițială a Ioanei este zero. La momentul de timp t_1, Ioana atinge cu vârful picioarelor suprafața de aterizare. Pentru a amortiza impactul cu această suprafață, ea flexează genunchii, astfel încât între momentele de timp t_1 şi t_2 centrul său de masă coboară pe distanța Δh. Consideră că masa Ioanei este m şi că accelerația gravitațională este $\vec{g}$.

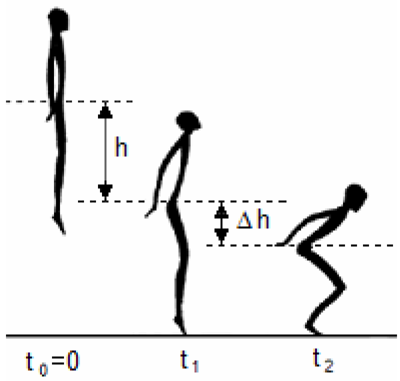

Figura 1

Pentru cerințele 1.a. şi 1.b., exprimă rezultatele – după caz - în funcție de înălțimea h, de distanța Δh, de masa m şi de modulul accelerației gravitaționale g.

1.a. Determină expresia modulului forței medii F_m cu care pământul acționează asupra picioarelor Ioanei, pe durata $\Delta t = t_2 - t_1$ a aterizării.

1.b. Dedu expresia duratei Δt a aterizării.

1.c. Estimează valoarea maximă a raportului $h/\Delta h$ care se poate realiza fără ruperea tibiei, dacă masa Ioanei este de $60\,kg$. Pentru estimare poți admite că presiunea suportată de un picior, fără ruperea tibiei, este de $1{,}6 \times 10^8 N \cdot m^{-2}$ şi că cea mai mică secțiune a tibiei este situată puțin deasupra gleznei şi are valoarea de circa $3{,}2\,cm^2$. Valoarea accelerației gravitaționale este de $9{,}8\,m \cdot s^{-1}$.

Sarcina de lucru nr. 2 – Săritura pe verticală în sus

După ce a efectuat săritura pe verticală în jos şi a aterizat pe porțiunea cu pământ uscat, Ioana execută o altă săritură, pe verticală în sus (figura 2). În intervalul de timp cât îşi „ia avânt" pentru efectuarea săriturii, Ioana, utilizând forța musculară, exercită asupra suprafeței orizontale de sprijin, o forță verticală de împingere. Într-o modelare simplă, consideră că forța verticală de împingere are o mărime constantă F_v.

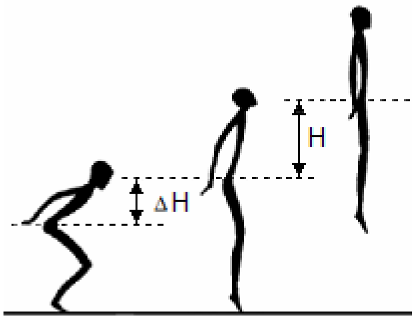

Figura 2

2.a. Dedu expresia înălțimii H, față de suprafața de sprijin, la care sare Ioana, dacă centrul său de masă se ridică cu ΔH, în intervalul de timp în care ea îşi „ia avânt". Exprimă rezultatul în funcție de mărimea forței F_v, de distanța ΔH, de masa m a Ioanei şi de modulul accelerației gravitaționale g.

2.b. Calculează valoarea înălțimii H, în situația în care $\Delta H = 50\,cm$ şi mărimea forței F_v este egală dublul modulului greutății Ioanei.

Imaginează-ţi că Ioana s-ar afla într-o bază lunară şi că ar executa o săritură pe verticală în sus, de acelaşi tip cu cea efectuată la suprafaţa Pământului.
Presupune că, în intervalul de timp în care Ioana şi-ar „lua avânt” pentru a executa săritura în interiorul bazei de pe Lună, centrul său de masă s-ar ridica cu aceeaşi distanță ΔH, ca şi în cazul săriturii efectuate pe Pământ şi că mărimea forței F_v ar rămâne egală cu dublul modulului greutății Ioanei pe planeta Pământ.

2.c. Estimează de câte ori ar fi mai mare înălțimea săriturii efectuate de Ioana pe Lună, față de cea de pe Pământ. Dacă îți sunt necesare, poți utiliza următoarele date:

Raza medie a Lunii	$R_L = 0{,}273 \cdot R_P$, *unde* R_P *este raza medie a Pământului*
Densitatea medie a Lunii	$\rho_L = 3{,}346\, g \cdot cm^{-3}$
Densitatea medie a Pământului	$\rho_P = 5{,}515\, g \cdot cm^{-3}$

Sarcina de lucru nr. 3 – Săritura în lungime de pe loc

Vlad este pe terenul de sport şi execută o săritură în lungime, de pe loc. În intervalul de timp cât îşi „ia avânt” pentru efectuarea săriturii, Vlad, utilizând forța musculară, exercită asupra suprafeței orizontale de sprijin, o forță de împingere $\vec{F}$ orientată după o direcție care face un unghi θ cu direcția orizontală. Consideră că mărimea forței de împingere este egală cu dublul modulului greutății lui Vlad.

3.a. Realizează o schiță care să ilustreze forțele care acționează asupra lui Vlad, în intervalul de timp cât îşi „ia avânt” pentru efectuarea săriturii.

3.b. Determină valoarea unghiului θ dintre direcția sub care acționează forța de împingere $\vec{F}$ şi direcția orizontală, astfel încât lungimea acestei sărituri să fie maximă.

Sarcina de lucru nr. 4 – Săritura în lungime din alergare

Un atlet aleargă câteva secunde pe o pistă orizontală, apoi îşi „ia avânt” şi execută o săritură în lungime. Într-o modelare simplă, consideră că în intervalul de timp foarte scurt cât atletul îşi „ia avânt”, centrul său de masă se situează cu $\ell_1 \cong 0{,}4\, m$ în fața ultimului loc în care picioarele atletului mai sunt în contact cu pista de alergare (figura 3). În acest interval de timp, atletul utilizează o energie suplimentară de circa $5{,}5 \cdot 10^2\, J$ pentru a-şi imprima o viteză verticală; energia suplimentară este eliberată ca urmare a unor procese biochimice care apar în muşchi.

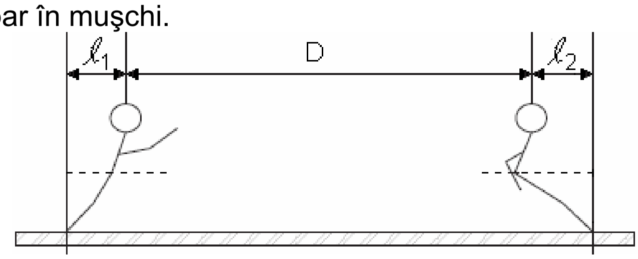

Figura 3

La aterizare, centrul de masă al atletului se situează cu $\ell_2 \cong 0{,}4\, m$ în spatele locului în care atletul atinge nisipul cu călcâiele.

4.a. Estimează, pe baza acestui model simplificat, recordul unui atlet la săritura în lungime din alergare.

4.b. Estimează valoarea unghiului format de viteza atletului cu direcția orizontală, imediat după ce acesta şi-a „luat avânt” şi picioarele sale nu mai sunt în contact cu pista de alergare.

Problema I - Soluție

Sarcina de lucru nr. 1 – Săritura pe verticală în jos

1.a. Ioana efectuează o săritură de la înălțimea h, fără viteză inițială. În intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$, asupra Ioanei se exercită din partea suprafeței pe care aterizează o forță medie verticală, cu modulul F_m (figura 4).

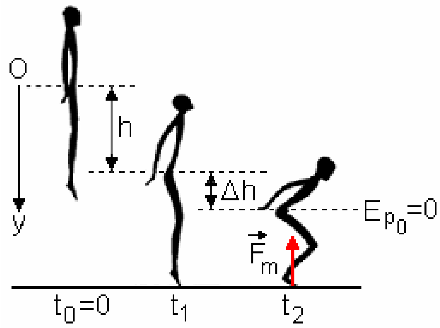

Figura 4

Bilanțul energiei, aplicat între momentul începerii săriturii $t_0 = 0$ şi momentul de timp t_2, conduce la următoarea expresie

$$m \cdot g \cdot (h + \Delta h) = F_m \cdot \Delta h \quad (1)$$

Nivelul de referință la care energia potențială gravitațională este considerată zero este precizat în figura 4. Prin urmare, expresia modulului forței medii verticale este

$$F_m = m \cdot g \cdot \left(1 + \frac{h}{\Delta h}\right) \quad (2)$$

Relația (2) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.a.

1.b. Variația impulsului Ioanei în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ are expresia

$$\Delta \vec{p} = -m \cdot \vec{v} \quad (3)$$

unde $\vec{v}$ este viteza Ioanei la momentul de timp t_1.

Într-un sistem de referință cu axa Oy îndreptată vertical în jos (figura 4), variația de impuls are mărimea

$$\Delta p = -m \cdot v \quad (4)$$

Aplicând legea conservării energiei, între momentele de timp $t_0 = 0$ şi respectiv t_1, se obține expresia pentru modulul vitezei Ioanei.

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (5)$$

Din relațiile (4) şi (5) rezultă

$$\Delta p = -m \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (6)$$

Prin aplicarea teoremei de variație a impulsului pentru intervalului de timp Δt se obține expresia

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_{total} \\ \dfrac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_m \end{cases} \quad (7)$$

Proiectând relația (7) în raport cu axa Oy se obține

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot g - F_m \quad (8)$$

Din relațiile (2) (6) şi (8) rezultă expresia duratei Δt a aterizării

$$\Delta t = \Delta h \cdot \sqrt{\frac{2}{g \cdot h}} \quad (9)$$

Relația (9) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.b.

1.c. Întrucât cea mai mică secțiune a tibiei $S = 3{,}2\,cm^2$ este situată puțin deasupra gleznei şi presiunea suportată de un picior este de $p = 1{,}6 \times 10^8\,N \cdot m^{-2}$, forța maximă care poate fi aplicată unui singur picior, fără ca tibia să se rupă, are expresia

$$F_1^{max} = p \cdot S \tag{10}$$

Deoarece aterizarea se face pe ambele picioare, expresia forței verticale maxime, care poate acționa din partea pământului, fără ca tibia să se rupă, este

$$F_m^{max} = 2 \cdot F_1^{max} \tag{11}$$

Din relațiile (2) (10) şi (11) se obține expresia raportului

$$\begin{cases} \left(\dfrac{h}{\Delta h}\right)_{max} = \dfrac{F_m^{max}}{m \cdot g} - 1 \\ \left(\dfrac{h}{\Delta h}\right)_{max} = \dfrac{2 \cdot p \cdot S}{m \cdot g} - 1 \end{cases} \tag{12}$$

Prin urmare se poate estima că valoarea maximă a raportului $\left(\dfrac{h}{\Delta h}\right)_{max}$, pentru care nu se produce ruperea tibiei este

$$\begin{cases} \left(\dfrac{h}{\Delta h}\right)_{max} = \dfrac{2 \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^8\,N \cdot m^{-2}\right) \cdot \left(3{,}2 \cdot 10^{-4}\,m^2\right)}{(60\,kg) \cdot \left(9{,}8\,m \cdot s^{-2}\right)} - 1 \\ \left(\dfrac{h}{\Delta h}\right)_{max} = 1{,}7 \cdot 10^2 \end{cases} \tag{13}$$

Observații:

Toate rezultatele numerice din cadrul acestei probleme sunt exprimate prin numere cu două cifre semnificative.

Pentru o săritură „țeapănă", cu flexarea de doar un centimetru, piciorul se rupe la un salt de la înălțimea de 1,7 m. Conform modelului simplificat în care a fost rezolvată sarcina de lucru, s-ar părea că se poate sări de la circa 85 de metri, dacă flexarea este de o jumătate de metru. De fapt, cerința din cadrul acestei sarcini de lucru se referă doar la ruperea oaselor, fără a lua în considerație faptul că există țesuturi care nu suportă decelerații atât de mari.

Relația (13) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.c.

Sarcina de lucru nr. 2 – Săritura pe verticală în sus

2.a. În intervalul de timp cât îşi „ia avânt" pentru efectuarea săriturii, Ioana exercită asupra suprafeței orizontale de sprijin o forță verticală de împingere $\vec{F}_v$, având o mărime considerată constantă. Conform principiului acțiunilor reciproce, suprafața de sprijin exercită asupra Ioanei o forță verticală $\left(-\vec{F}_v\right)$.

Una dintre modalitățile de a deduce expresia înălțimii la care sare Ioana se bazează pe utilizarea bilanțului energiei mecanice. Nivelul de referință la care energia potențială gravitațională este considerată zero este precizat în figura 5.

$$F_v \cdot \Delta H = m \cdot g \cdot (H + \Delta H) \tag{14}$$

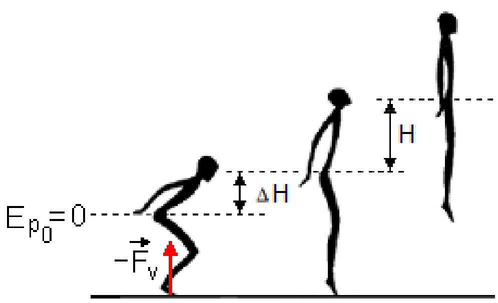

Figura 5

Din relația (14) se deduce expresia înălțimii la care sare Ioana

$$H = \Delta H \cdot \left(\frac{F_v}{m \cdot g} - 1\right) \tag{15}$$

Relația (15) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.a.

2.b. Utilizând relația (15) şi efectuând calculul numeric se obține valoarea înălțimii

$$H = 50\,cm \tag{16}$$

Relația (16) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.b.

2.c. Pe Pământ, expresia înălțimii săriturii executate de Ioana este dată de relația (15). În ipoteza că Ioana s-ar afla într-o bază lunară şi ar efectua acelaşi tip de săritură, expresia înălțimii ar fi

$$H_L = \Delta H \cdot \left(\frac{F_v}{m \cdot g_L} - 1\right) \tag{17}$$

unde g_L este mărimea accelerației gravitaționale la suprafața Lunii.

Prin împărțirea membru cu membru a expresiilor din relațiile (15) şi (17) se obține

$$\frac{H_L}{H} = \frac{\dfrac{F_v}{m \cdot g_L} - 1}{\dfrac{F_v}{m \cdot g} - 1} \tag{18}$$

Ținând cont că pentru săritura pe care Ioana ar efectua-o pe Lună $F_v = 2 \cdot m \cdot g$, rezultă

$$\frac{H_L}{H} = \left(\frac{2 \cdot g}{g_L} - 1\right) \tag{19}$$

Expresia din relația (19) evidențiază faptul că, pentru a estima valoarea raportului $\frac{H_L}{H}$, este necesară cunoaşterea valorii pentru raportul $\frac{g}{g_L}$.

Greutatea unui corp de masă m_0, aflat la suprafața Pământului, este forța cu care acel corp este atras de Pământ

$$K \cdot \frac{M_P \cdot m_0}{R_P^2} = m_0 \cdot g \tag{20}$$

În relația (20) M_P este masa Pământului, iar R_P este raza acestuia.

Dacă densitatea medie a Pământului este ρ_P, atunci masa acestuia are expresia

$$M_P = \frac{4 \cdot \pi \cdot R_P^3}{3} \cdot \rho_P \tag{21}$$

Din relațiile (20) şi (21) se obține

$$K \cdot \rho_P \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot R_P = g \tag{22}$$

În mod analog, se deduce o expresie pentru mărimea accelerației la suprafața Lunii

$$K \cdot \rho_L \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot R_L = g_L \tag{23}$$

În relația (23) ρ_L este densitatea medie Lunii, iar R_L este raza acesteia.

Împărțind membru cu membru expresiile din relațiile (22) şi (23) rezultă

$$\frac{g}{g_L} = \frac{\rho_P \cdot R_P}{\rho_L \cdot R_L} \tag{24}$$

Combinând relațiile (19) şi (24) se obține expresia

$$\frac{H_L}{H} = \left(\frac{2 \cdot \rho_P \cdot R_P}{\rho_L \cdot R_L} - 1\right) \tag{25}$$

Înlocuind în relația (25) valorile numerice indicate în enunțul problemei şi efectuând calculele se obține

$$\frac{H_L}{H} = 11 \tag{26}$$

Relația (25) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.c.

Sarcina de lucru nr. 3 – Săritura în lungime de pe loc

3.a. Sistemul de forțe care acționează asupra lui Vlad - corespunzător intervalului de timp cât acesta își „ia avânt" pentru efectuarea săriturii - este format din greutatea $\vec{G}$ și din forța de reacțiune exercitată din partea suprafeței de sprijin $\vec{F}' = -\vec{F}$. În figura 6 este schițată diagrama acestor forțe

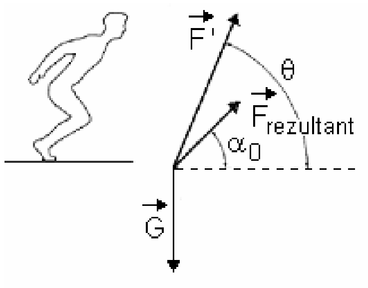

Figura 6

Forța rezultantă

$$\vec{F}_{rezultant} = \vec{F}' + \vec{G} \qquad (27)$$

este orientată sub unghiul α_0 față de direcția orizontală.

Schița din figura 6 reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3.a.

3.b. În intervalul de timp cât Vlad își „ia avânt" pentru a efectua săritura, forța $\vec{F}_{rezultant}$ îi imprimă lui Vlad o accelerație, care - la rândul ei - determină apariția unei viteze inițiale $\vec{v}_0$, orientată în direcția și sensul forței rezultante. Din momentul desprinderii de suprafața de sprijin, Vlad se deplasează numai sub acțiunea propriei greutăți.

În raport cu un sistem de axe xOy, cu originea în punctul în care Vlad își începe mișcarea în câmp gravitațional uniform (figura 7), componentele accelerației și ale vitezei inițiale au expresiile

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad (28)$$

respectiv

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha_0 \\ v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha_0 \end{cases} \qquad (29)$$

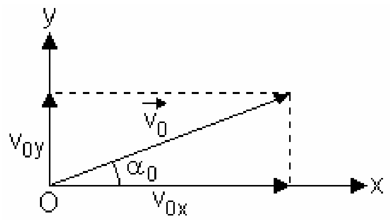

Figura 7

Mișcarea lui Vlad în câmp gravitațional uniform este compusă dintr-o mișcare rectilinie uniformă pe direcția Ox și o mișcare rectilinie uniform variată pe direcția Oy. Considerând $t_0 = 0$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cdot \cos\alpha_0 \\ v_y = v_0 \cdot \sin\alpha_0 - g \cdot t \end{cases} \qquad (30)$$

Legile de mișcare au expresiile

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha_0 \\ y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha_0 - \dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases} \qquad (31)$$

iar traiectoria descrisă de Vlad, din momentul desprinderii de suprafața de sprijin, este una parabolică.
Vlad revine în planul orizontal de lansare, după intervalul de timp

$$\Delta\tau = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha_0}{g} \qquad (32)$$

parcurgând în direcția axei Ox distanța

$$b(\alpha_0) = v_0 \cdot \Delta\tau \cdot cos\,\alpha_0 \qquad (33)$$

Combinând relațiile (32) şi (33) se obține expresia

$$b(\alpha_0) = \frac{v_0{}^2 \cdot sin\,2\alpha_0}{g} \qquad (34)$$

Expresia din relația (34) evidențiază faptul că distanța $b(\alpha_0)$ atinge valoarea maximă, dacă

$$sin\,2\alpha_0 = 1 \qquad (35)$$

respectiv, dacă unghiul de lansare are valoarea

$$\alpha_0 = 45° \qquad (36)$$

Utilizând diagrama forțelor din figura 6 şi proiectând aceste forțe după direcția orizontală, respectiv verticală se obține

$$\begin{cases} F' \cdot cos\,\theta = F_{rezultant} \cdot cos\,\alpha_0 \\ F' \cdot sin\,\theta - G = F_{rezultant} \cdot sin\,\alpha_0 \end{cases} \qquad (37)$$

Împărțind membru cu membru cele două expresii din relația (37), rezultă

$$\frac{F' \cdot cos\,\theta}{F' \cdot sin\,\theta - G} = ctg\alpha_0 \qquad (38)$$

Ținând cont că mărimea forței $\vec{F}'$ este egală cu dublul modulului greutății lui Vlad şi că lungimea săriturii este maximă dacă unghiului $\alpha_0 = 45°$, se obține

$$\frac{2 \cdot cos\,\theta}{-1 + 2 \cdot sin\,\theta} = 1 \qquad (39)$$

Scriind ecuația trigonometrică din relația (39) sub forma

$$8 \cdot sin^2\,\theta - 4 \cdot sin\,\theta - 3 = 0 \qquad (40)$$

şi rezolvând această ecuație, se obține

$$\begin{cases} \theta = arcsin\ 0{,}911 \\ \theta = 66° \end{cases} \qquad (41)$$

Relația (41) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3.b.

Sarcina de lucru nr. 4 – Săritura în lungime din alergare

4.a. Pe baza modelului săriturii în lungime din alergare, prezentat în cadrul acestei sarcini de lucru (figura 3), expresia lungimii totale a săriturii este

$$L = \ell_1 + D + \ell_2 \qquad (42)$$

unde ℓ_1 şi ℓ_2 sunt estimate fiecare la $0{,}4\,m$.

În etapa de alergare pe pistă, un atlet de performanță dobândeşte o viteză orizontală ce poate fi estimată la valoarea

$$v_x = 10\,m \cdot s^{-1} \qquad (43)$$

Atletul, a cărui masă poate fi estimată la valoarea

$$m = 80\,kg \qquad (44)$$

utilizează energia suplimentară $E = 5{,}5 \cdot 10^2\,J$ pentru a-şi imprima o viteză verticală, având expresia

$$v_y = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m}} \qquad (45)$$

Valoarea vitezei verticale este

$$\begin{cases} v_y = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 5{,}5 \cdot 10^2\,J}{80\,kg}} \\ v_y = 3{,}7\,m \cdot s^{-1} \end{cases} \qquad (46)$$

Distanța orizontală, parcursă de atlet în intervalul de timp τ cât acesta „zboară” prin aer, doar sub acțiunea forței de greutate are expresia

$$D = v_x \cdot \tau \qquad (47)$$

Pe de altă parte

$$\tau = 2 \cdot \frac{v_y}{g} \quad (48)$$

Din relațiile (47) şi (48) se obține

$$D = 2 \cdot v_x \cdot \frac{v_y}{g} \quad (49)$$

Substituind valorile numerice estimate prin relațiile (43) şi (46) în relația (49) şi efectuând calculul numeric se obține

$$D = 7{,}6\,m \quad (50)$$

Conform relației (42) recordul pentru săritura în lungime din alergare, estimat pe baza acestui model simplificat este

$$\begin{cases} L = 0{,}4\,m + 7{,}6\,m + 0{,}4\,m \\ L = 8{,}4\,m \end{cases} \quad (51)$$

Observație: Recordul la săritura în lungime din alergare aparține lui Mike Powell (1991) şi este de $8{,}95\,m$.

Relația (51) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 4.a.

4.b. Conform diagramei vitezelor din figura 8, expresia unghiului α format de viteza atletului cu direcția orizontală, imediat ce acesta şi-a luat avânt pentru a executa săritura este

$$\alpha = arctg\,\frac{v_y}{v_x} \quad (52)$$

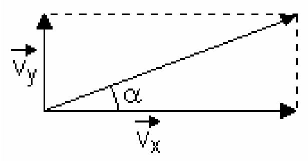

Figura 8

Substituind în relația (52), valorile numerice din relațiile (43) şi (46) şi efectuând calculul numeric se estimează că valoarea unghiului format de viteza atletului cu direcția orizontală este

$$\begin{cases} \alpha = arctg\,0{,}37 \\ \alpha = 20^\circ \end{cases} \quad (53)$$

Relația (53) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 4.b.

© Soluție propusă de:

Dr. Delia DAVIDESCU – Centrul Național de Evaluare şi Examinare – M E C T S

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti