CONCURSUL NAȚIONAL DE FIZICĂ "EVRIKA!"

Ediția a 20 - a

7 – 9 mai 2010 – Brăila

CLASA a XII-a

Barem de notare

<table>
<tr><th>Problema 1</th><th>Parțial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td>Barem – Problema 1</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>

A) Oscilațiile fiind simetrice, punctele materiale se vor afla permanent în vârfurile unui tetraedru regulat, lungimea muchiei acestuia variind periodic.

Pentru a înțelege mai bine mişcarea fiecărui punct material să considerăm sfera circumscrisă care trece prin vârfurile tetraedrului regulat, al cărei centru se află în centrul de simetrie al tetraedrului. Fiecare punct material se va deplasa de-a lungul razei sferei respective.

În desenul din figura alăturată am reprezentat tetraedrul regulat ABCD, fiecare muchie având lungimea l, şi am notat O centrul sferei circumscrise. Raza sferei circumscrise este $OA = OD = r$. Înălțimea DK a tetraedrului este axă de simetrie, iar punctul K este centrul triunghiului echilateral ABC.

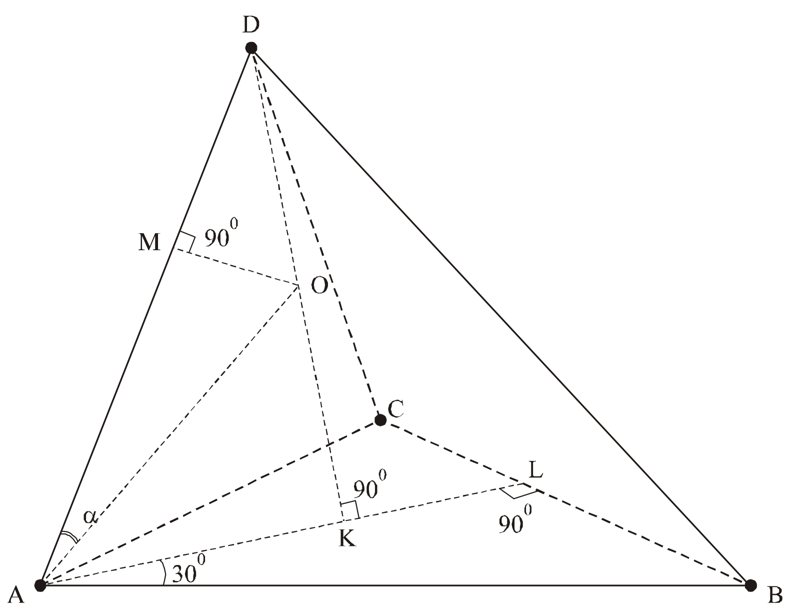
Rezultă:

$$AK = \frac{2}{3}AL = \frac{2}{3}AB\cos 30° = \frac{l}{\sqrt{3}};$$

$$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = l\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$AM = MD = \frac{l}{2};\ \mathrm{OM} \perp \mathrm{AD};$$

$$\Delta\mathrm{OMD} \sim \Delta\mathrm{AKD};$$



</td><td>0,25

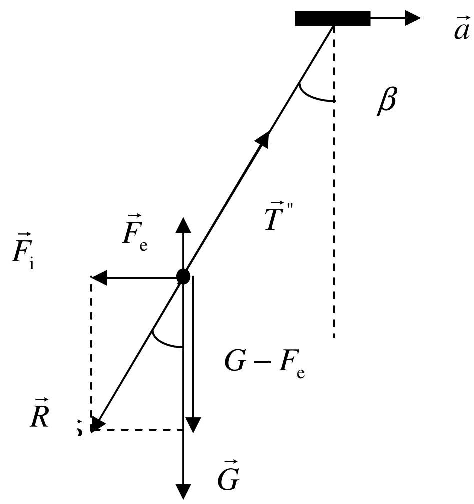
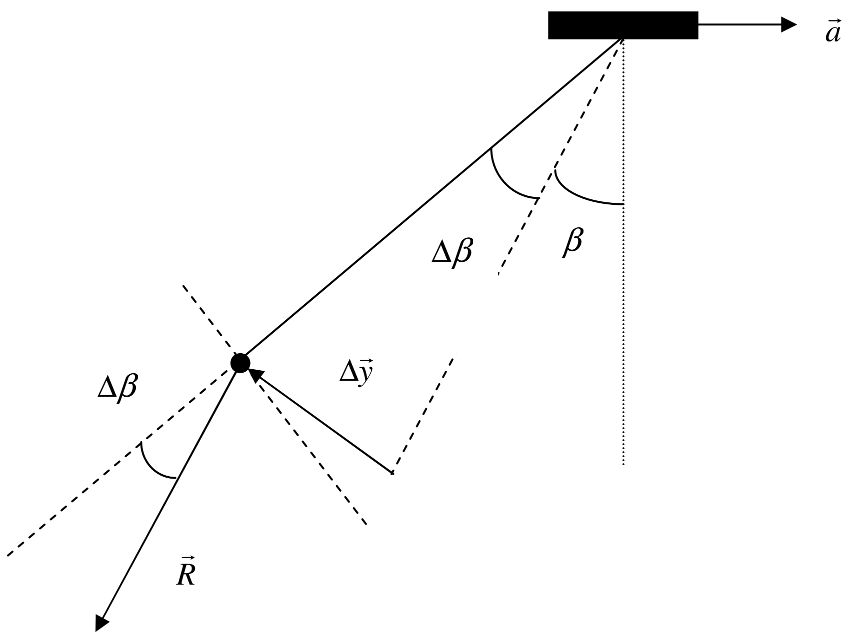
0,25

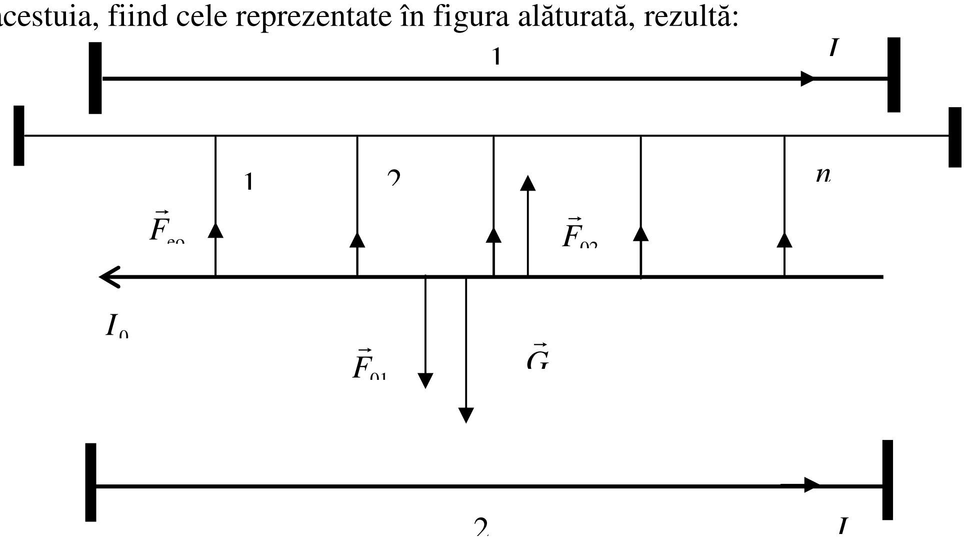
0,25

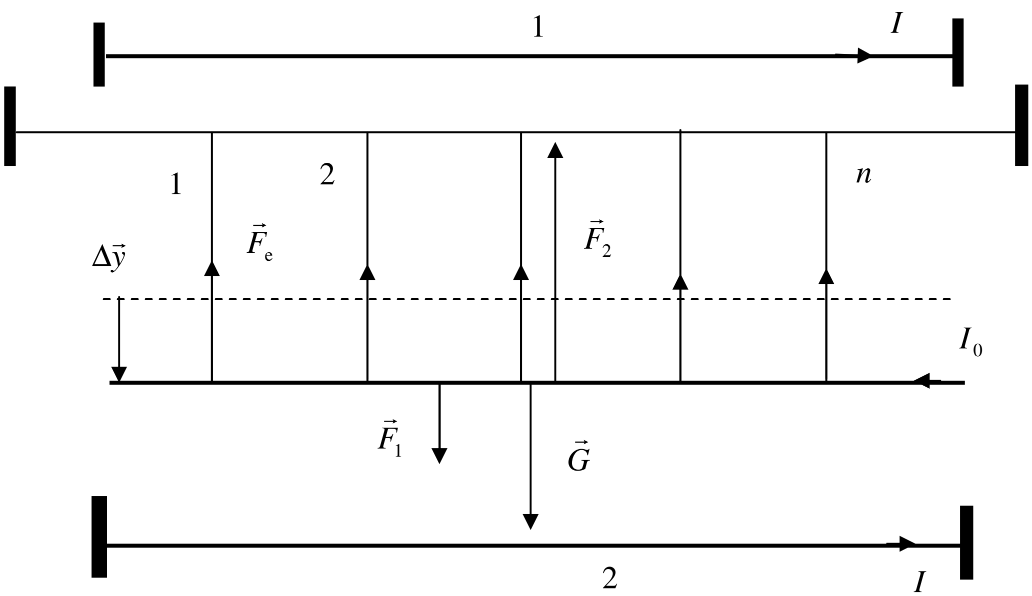
0,25

0,25</td><td>3.00</td></tr>
</table>

$$\frac{OD}{AD}=\frac{MD}{DK};\ OD=AD\frac{MD}{DK}=r;\ r=l\ \frac{\sqrt{6}}{4};\ l=\frac{4}{\sqrt{6}}\ r,$$ expresii reprezentând relația dintre lungimea laturii tetraedrului regulat şi raza sferei circumscrise. În timpul oscilațiilor sistemului unei variații Δl a lungimii laturii tetraedrului îi corespunde o variație Δr a razei sferei circumscrise, astfel încât: $$\Delta l=\frac{4}{\sqrt{6}}\Delta r;\ \Delta r=\frac{\sqrt{6}}{4}\Delta l.$$ Asupra fiecărui punct material, în timpul oscilațiilor simetrice, acționează, pe direcția fiecărei muchii a tetraedrului, corespunzător unei alungiri (sau comprimări) Δl a acesteia, câte o forță dată de expresia: $$F_1=k\Delta l=\frac{4k}{\sqrt{6}}\Delta r.$$ Forța rezultantă care acționează, de exemplu asupra punctului material din A, este: $$F=3F_1\cos\alpha,$$ a cărei orientare, datorită simetriei, este de-a lungul razei OA; $$\cos\alpha=\frac{AM}{OA}=\frac{2}{\sqrt{6}};$$ $$F=4k\Delta r;\ k_e=4k;$$ $$F=k_e\Delta r;\ \vec{F}=-k_e\Delta\vec{r},$$ relații care dovedesc că oscilațiile simetrice ale sistemului sunt armonice. $$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}};T=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25	
B) Perioada oscilațiilor armonice ale pendulului, atunci când plăcile şi suportul pendulului sunt în repaus, este dată de expresia: $$T_0=2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg\pm F_e}}=2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg\pm qE}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g\pm\frac{q}{m}E}},$$ unde: m – masa pendulului; q – sarcina electrică a pendulului; E – intensitatea câmpului electric dintre cele două plăci; g – accelerația gravitațională. Semnele $(\pm)$ corespund celor două orientări posibile ale vectorului $\vec{E}$. Direcția față de care se efectuează oscilațiile pendulului, atunci când suportul acestuia şi cele două plăci conductoare se deplasează cu accelerația orizontală $\vec{a}$, este reprezentată în figura alăturată, unde sunt reprezentate forțele care acționează asupra pendulului, asigurând echilibrul acestuia, din care rezultă: $$R=\sqrt{(mg-F_e)^2+m^2a^2}.$$	0,25 0,25	**3,00**

 	0,25	
În aceste condiții, utilizând figura alăturată, pentru forța responsabilă de oscilațiile pendulului, obținem:  	0,25	
$$F = R\sin\Delta\beta = \sqrt{(mg - F_\mathrm{e})^2 + m^2a^2}\,\sin\Delta\beta\,,$$	0,20	
care, pentru oscilații mici devine: $$F = \sqrt{(mg - F_\mathrm{e})^2 + m^2a^2}\,(\Delta\beta)\,;\ \Delta y \approx l\Delta\beta;$$	0,10	
$$F = \frac{\sqrt{(mg - F_\mathrm{e})^2 + m^2a^2}}{l}\Delta y;$$	0,25	
$$k = \frac{\sqrt{(mg - F_\mathrm{e})^2 + m^2a^2}}{l};\ F = k\Delta y;\ \ \vec{F} = -k\Delta\vec{y}\,,$$	0,25	

ceea ce dovedeşte că şi în acest caz oscilațiile pendulului sunt armonice;		
$$k = m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\sqrt{(mg - F_\mathrm{e})^2 + m^2a^2}}{l};$$	0,20	
$$T^2 = \frac{4\pi^2 ml}{\sqrt{(mg - F_\mathrm{e})^2 + m^2a^2}};$$	0,10	
$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{\sqrt{\left(g - \frac{q}{m}E\right)^2 + a^2}};$$	0,10	
$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 l}{g - \frac{q}{m}E};\ g - \frac{q}{m}E = \frac{4\pi^2 l}{T_0^2};$$	0,10	
$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{\sqrt{\frac{16\pi^4 l^2}{T_0^4} + a^2}};$$	0,10	
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{\frac{16\pi^4 l^2}{T_0^4} + a^2}}};$$	0,10	
$$T = 2\pi T_0\sqrt{\frac{l}{\sqrt{16\pi^4 l^2 + a^2 T_0^4}}};$$	0,25	
$$\tan\beta = \frac{F_\mathrm{i}}{G - F_\mathrm{e}} = \frac{a}{g - \frac{qE}{m}};\ \tan\beta = \frac{aT_0^2}{4\pi^2 l}.$$	0,25	
C) Forțele care acționează asupra conductorului mobil, asigurând echilibrul acestuia, fiind cele reprezentate în figura alăturată, rezultă: 	0,25	

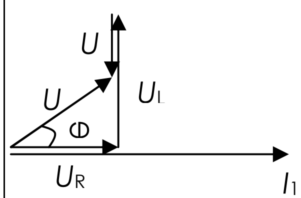
		3,00
$$\vec{G}+\vec{F}_{01}+\vec{F}_{02}+n\vec{F}_{e0}=0;$$	0,25	
$$F_{01}=F_{02}=\mu_0\frac{I_0 I}{2\pi d}l,$$ unde l este lungimea fiecărui conductor;	0,25	
$$\vec{F}_{01}=-\vec{F}_{02};\ F_e=k(\Delta y_0),$$	0,25	
unde (Δy_0) este alungirea fiecărui resort, corespunzător poziției de echilibru a conductorului mobil; $$nk(\Delta y_0)=mg.$$ Când conductorul mobil este deplasat față de poziția de echilibru, așa cum indică figura alăturată, rezultanta forțelor responsabilă de oscilațiile conductorului mobil este:	0,25	
	0,25	
$$\vec{F}=\vec{G}+\vec{F}_1+\vec{F}_2+n\vec{F}_e\neq 0;$$	0,10	
$$F=-mg-F_1+F_2+nF_e;$$	0,10	
$$F_e=k(\Delta y_0+\Delta y);$$	0,10	
$$F_1=\mu_0\frac{I_0 I}{2\pi(d-\Delta y)}l=\mu_0\frac{I_0 I}{2\pi d\left(1-\frac{\Delta y}{d}\right)}l=\mu_0 l\frac{I_0 I}{2\pi d}\left(1-\frac{\Delta y}{d}\right)^{-1}\approx\mu_0 l\frac{I_0 I}{2\pi d}\left(1+\frac{\Delta y}{d}\right);$$	0,25	
$$F_2=\mu_0\frac{I_0 I}{2\pi(d+\Delta y)}l=\mu_0\frac{I_0 I}{2\pi d\left(1+\frac{\Delta y}{d}\right)}l=\mu_0 l\frac{I_0 I}{2\pi d}\left(1+\frac{\Delta y}{d}\right)^{-1}\approx\mu_0 l\frac{I_0 I}{2\pi d}\left(1-\frac{\Delta y}{d}\right);$$	0,25	

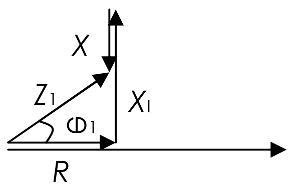
$$F = \left(nk - \mu_0 l \frac{I_0 I}{\pi d^2} \right) \Delta y;\ K = nk - \mu_0 l \frac{I_0 I}{\pi d^2};$$ $$F = K(\Delta y);\ \vec{F} = -K(\Delta \vec{y}),$$ ceea ce dovedeşte că oscilațiile verticale mici ale conductorului mobil sunt armonice. Rezultă: $$K = nk - \mu_0 l \frac{I_0 I}{\pi d^2} = m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2};$$ $$T = 2\pi d \sqrt{\frac{\pi m}{\pi n k d^2 - \mu_0 l I_0 I}}.$$	0,10 0,25 0,10 0,25	
Oficiu		**1,00**

Problema 2- CLASA a-XII-a	**Parțial**	**Punctaj**
Barem – Problema 2		**10**

A) 4 puncte

1 punct a) Pentru latura serie R, L, C, parcursă de curentul cu intensitatea efectivă I_1:

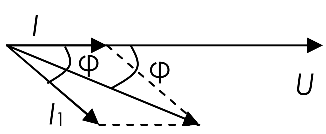


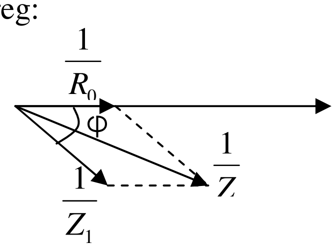


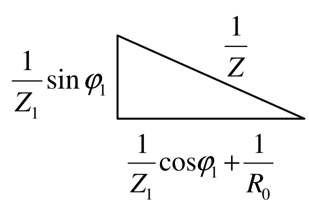
$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{Z_1} \qquad \cos\varphi_1 = \frac{R}{Z_1}$$

Pentru circuitul întreg:







$$\frac{1}{Z}=\sqrt{\left(\frac{1}{Z_1}\cos\varphi_1+\frac{1}{R_0}\right)^2+\left(\frac{1}{Z_1}\sin\varphi_1\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{R_0^2}+\frac{1}{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}\left(1+\frac{2R}{R_0}\right)}$$

;

$$U=IZ=\frac{IR_0}{\sqrt{1+\frac{R_0\left(R_0+2R\right)}{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}};$$

$$U=\frac{IR_0}{\sqrt{1+\frac{R_0\left(R_0+2R\right)}{R^2+\left(L2\pi\nu-\frac{1}{C2\pi\nu}\right)^2}}}=f(\nu).$$

1 punct b) Dependența tensiunii de frecvența ν este similară dependenței de pulsația ω.

Notăm:

$$f_1(\nu)=R^2+\left(L2\pi\nu-\frac{1}{C2\pi\nu}\right)^2 \text{, cu } \nu\in(0,\infty)\,,$$

respectiv:

$$f_1(\omega)=R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2 \text{, cu } \omega\in(0,\infty)\,.$$

Când

$$\left\{\begin{matrix}\omega\to 0\\ \text{sau}\\ \omega\to\infty\end{matrix}\right\}\Rightarrow f_1(\omega)\to\infty\Rightarrow\frac{1}{f_1(\omega)}\Rightarrow 0 \text{ și } U\to IR_0\,,$$

$$\lim_{\substack{\omega\to 0\\ \omega\to\infty}}U=IR_0\,,\ \text{limita maximă.}$$

Ca urmare U are cel puțin un minim;

U = minim când radicalul este maxim, respectiv $f_1(\omega)$ = minim;

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}\omega} = f_1^{'}(\omega) = 2\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right)\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0\,,$$

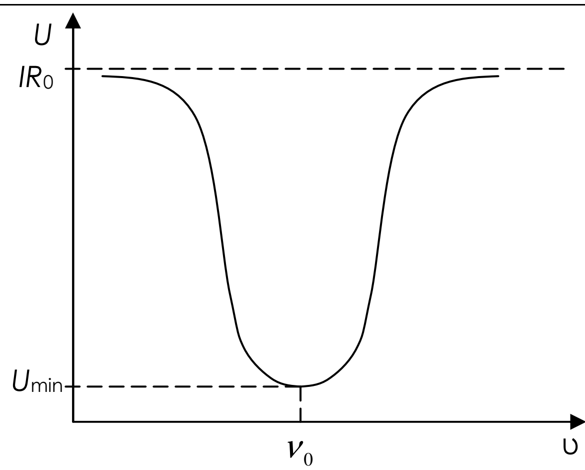
conduce la soluția fizică şi unică;

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0\,,\ \text{respectiv}\ \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,.$$

Pentru $\nu = \nu_0$ se obține $U_{\min} = \dfrac{IR_0R}{R_0 + R}$, limita minimă.

1 punct c)

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,.$$



1 punct d) Graficul dependenței $U = f(\nu)$ este prezentat în desenul alăturat.

B) 5 puncte

2 puncte a) Varianta 1

Inițial, intensitatea curentului electric este nulă. După închiderea întrerupătorului, intensitatea curentului începe să crească şi încarcă

condensatorul. Lucrul mecanic efectuat de sursă pentru a deplasa sarcina q pe circuit, se regăseşte în energie a câmpului magnetic din bobină şi în energie a câmpului electric din condensator: $$qE = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C};$$ $$i^2 = \left(-\frac{1}{LC}\right)q^2 + \left(\frac{2E}{L}\right)q = f(q);$$ $$I_{\max}^2 = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{CE^2}{L} \Rightarrow I_{\max} = E\sqrt{\frac{C}{L}}.$$ **1 punct** Ulterior intensitatea curentului începe să scadă, $i \to 0$, îşi menţine sensul şi continuă să încarce condensatorul până când $i = 0$. În acest moment condensatorul este încărcat la maxim, $q = q_{\max}$, respectiv $u_C = U_{\max}$. Deoarece în acest moment $i = 0$, lucrul mecanic efectuat de sursă pentru a deplasa sarcina q pe circuit, se regăseşte doar în energie a câmpului electric din condensator: $$q_{\max}E = \frac{q_{\max}^2}{2C}.$$ Se obţine $q_{\max}=2CE$, respectiv $U_{\max}=2E$. **1 punct** Varianta 2 $$\begin{cases} E + \left(-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{q}{C}; \\ qE = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \end{cases}$$ Când intensitatea curentului a ajuns la valoarea maximă, $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, $E = \frac{q}{C}$, iar condensatorul este încărcat cu sarcina $q = CE$. Lucrul mecanic efectuat de sursă pentru a deplasa sarcina electrică q pe circuit, se regăseşte în energie a câmpului magnetic din bobină şi în energie		

a câmpului electric din condensator:

$$qE = \frac{LI_{\max}^2}{2} + \frac{q^2}{2C}.$$

Înlocuind $q = CE$ se obține $I_{\max} = E\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Ulterior intensitatea curentului începe să scadă, își menține sensul şi continuă să încarce condensatorul până când $i = 0$.

În acest moment $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$, deci tensiunea are un maxim,

$u_C = U_{\max}$, respectiv $q = q_{\max} = CU_{\max}$.

Deoarece $i = 0$, lucrul mecanic efectuat de sursă pentru a deplasa $q = q_{\max}$ pe circuit, se regăseşte doar în energie a câmpului electric din condensator:

$$q_{\max}E = \frac{q_{\max}^2}{2C}.$$

Se obține $q_{\max} = 2CE$, respectiv $U_{\max} = 2E$.

3 puncte b) În ecuația circuitului, $E + \left(-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{q}{C}$, utilizăm $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ şi obținem:

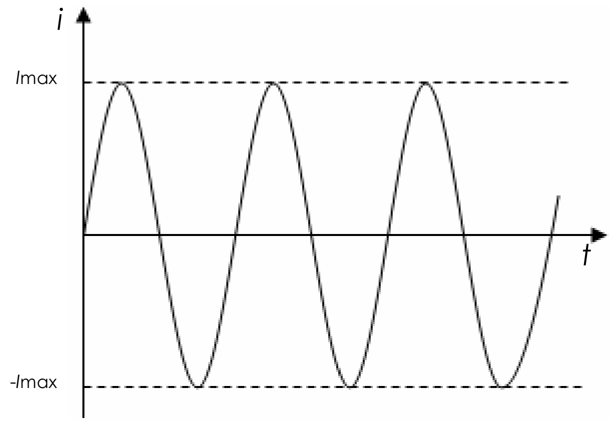
$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q - \frac{E}{L} = 0 \quad \text{respectiv} \quad q''_{(t)} + \omega^2 q_{(t)} - \frac{E}{L} = 0. \qquad (1)$$

Soluția ecuației (1) este de tipul $q_{(t)} = A\sin(\omega t + \varphi) + B$, (2)

în care $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, iar φ, A şi B sunt constante ce urmează a fi determinate;

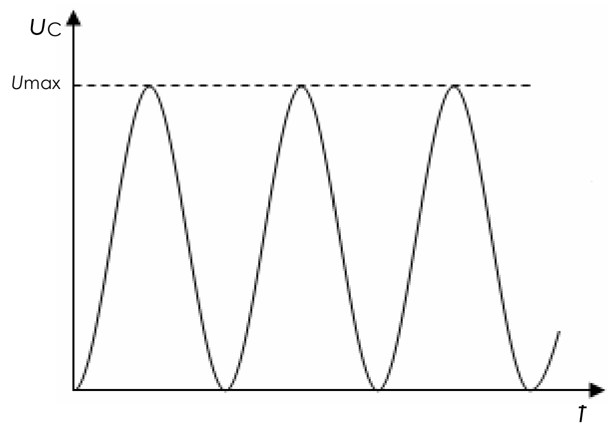
$$\frac{\mathrm{d}^2q}{dt^2} = q''_{(t)} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi). \qquad (3)$$

Înlocuind expresiile $q''_{(t)}$ şi $q_{(t)}$ în ecuaţia (1) se obţine constanta $B = CE$. Din expresia intensităţii curentului: $$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = q'_{(t)} = \omega A\cos(\omega t + \varphi) = I_{\max}\cos(\omega t + \varphi),$$ obţinem constanta $A = CE$. La momentul iniţial, $t = 0$, intensitatea curentului era nulă, $i = 0$, iar condensatorul neîncărcat, $q = 0$, astfel încât se obţine $\varphi = -\frac{\pi}{2}$; $$\begin{cases} q_{(t)} = CE\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + CE; \textbf{1punct} \\ i_{(t)} = E\sqrt{\frac{C}{L}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right); \textbf{0,5 puncte} \\ u_{(t)} = \frac{q}{C} = E\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + E, \textbf{0,5puncte} \end{cases}$$ ale căror grafice sunt prezentate în desenele alăturate.		

<table>
<tr>
<td>


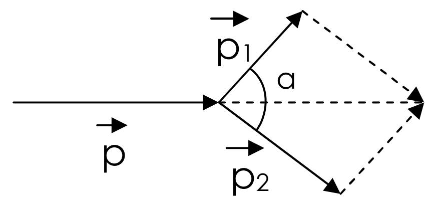
0,5 puncte

.



0,5 puncte
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Oficiu		**1,00**

Problema 3- CLASA a-XII-a	**Parțial**	**Punctaj**
Barem – Problema 3		**10**
A) 4 puncte Notăm β = v/*c*, β<1.  Conservarea energiei şi impulsului: $\begin{cases} E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\alpha \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} E = mc^2 \\ p = mv = m\beta c \end{matrix}\right\} \Rightarrow E = \dfrac{pc}{\beta}$ şi $\begin{cases} \varepsilon_1 = h\nu_1 = p_1 c; \\ \varepsilon_2 = h\nu_2 = p_2 c. \end{cases}$	1 p	
Folosim expresiile pentru *E*, ε_1 şi ε_2, rezultă: $\begin{cases} p = \beta(p_1 + p_2); \\ p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\alpha; \end{cases}$ $(\beta^2 - 1)(p_1^2 + p_2^2) + 2\beta^2 p_1 p_2 = 2p_1 p_2 \cos\alpha$. Se obține: $\cos\alpha = \beta^2 - \dfrac{1-\beta^2}{2}\left(\dfrac{p_1}{p_2} + \dfrac{p_2}{p_1}\right);$	1 p	
$\cos\alpha_{min} =$ maxim atunci când expresia $\left(\dfrac{p_1}{p_2} + \dfrac{p_2}{p_1}\right)$ este minimă.	1 p	

<table>
<tr><td>
Notații:

$$\frac{p_1}{p_2} = x \text{ şi } f_{(x)} = x + \frac{1}{x} = \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \text{ cu } x \in (0, \infty),$$

unde $f(x)$ reprezintă o sumă de doi termeni al căror produs este constant şi are valoarea minimă atunci când termenii sumei sunt egali:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow p_1 = p_2,$$

respectiv atunci când se anulează derivata de ordinul întâi a funcției f:

$$f'_{(x)} = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \text{ când } x = 1, \text{ adică } p_1 = p_2.$$

În acest caz $\alpha_{min} = \arccos(2\beta^2-1)$.

Dacă $p_1 = p_2$ atunci $\nu_1 = \nu_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, deci fotonii rezultați în urma dezintegrării au aceleaşi frecvențe, respectiv aceleaşi energii.
</td><td>1 p</td><td></td></tr>
<tr><td>
B) 5 puncte

Notații:

S = sistemul de referință al laboratorului (SRL);

S' = sistemul de referință legat de electron;

λ_0, λ, θ = mărimi în S, respectiv λ'_0, λ', θ' = mărimi în S'.

In S' are loc efect Compton pe un electron în repaus, astfel încât:

$$\lambda' = \lambda'_0 + 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta'}{2}. \qquad (1)$$

Vom determina λ'_0 din formulele frecvențelor în efectul Doppler longitudinal - cazul relativist:

$$\nu'_0 = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \nu_0 \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
</td><td>0,5 p</td><td></td></tr>
</table>

când electronul se deplasează în acelaşi sens cu fotonul; $$\lambda'_0 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,. \qquad (2)$$	0,5 p	
Unghiul de împrăştiere în S’ îl determinăm din legea de compunere a vitezelor: $$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}\,,$$	0,5 p	
în care: $$u_x = u\cos\theta = c\cos\theta\,;\; u'_x = u'\cos\theta' = c\cos\theta'\,;\; V = \beta c\,.$$ Se obține: $$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}\,;$$ $$2\sin^2\frac{\theta'}{2} = \frac{(1+\beta)(1-\cos\theta)}{1-\beta\cos\theta}\,. \qquad (3)$$ Înlocuim (2) şi (3) în (1) şi determinăm lungimea de undă a fotonului împrăştiat în sistemul de referință legat de electron: $$\lambda' = \lambda_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + \frac{h}{m_0 c}\,\frac{(1+\beta)(1-\cos\theta)}{1-\beta\cos\theta}\,.$$	1 p	
Împrăştierea fotonului este un eveniment, văzut din S sub unghiul θ, având frecvența ν şi lungimea de undă λ, iar din S’ este văzut sub unghiul θ’, având frecvența ν’ şi lungimea de undă λ’. Faza undei plane monocromatice este $\omega t - \vec{k}\vec{r}$ în S, respectiv $\omega' t' - \vec{k}'\vec{r}'$ în S’. Numărul de oscilații, sau de lungimi de undă, trebuie să fie acelaşi indiferent de sistemul de referință:		

$$N=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}=\frac{\omega t-\vec{k}\vec{r}}{2\pi}=\frac{\omega' t'-\vec{k}'\vec{r}'}{2\pi}.$$ Utilizând transformările Lorentz de legătură între coordonatele spațio-temporale (x,y,z,t) şi (x', y', z',t')din cele două sisteme de referință, S şi S', obținem frecvențele şi direcțiile de zbor ale fotonului: $$\begin{cases}\omega=\dfrac{\omega'+k'_{x'}V}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ k_x=\dfrac{k'_{x'}+\dfrac{\omega' V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ k_y=k'_{y'}\\ k_z=k'_{z'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega'=\dfrac{\omega-k_xV}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ k'_x=\dfrac{k_x-\dfrac{\omega V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ k'_y=k_y\\ k'_z=k_z\end{cases}\quad \text{respectiv}$$ $$\begin{cases}\nu=\nu'\dfrac{1+\beta\cos\theta'}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \cos\theta=\dfrac{\cos\theta'+\beta}{1+\beta\cos\theta'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nu'=\nu\dfrac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \cos\theta'=\dfrac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}\end{cases}$$	1,5 p	
Pentru deplasare în lungul axei OX, θ = 0 obținem θ' = 0 şi formulele frecvențelor înainte de împrăştiere, efect Dopller longitudinal: $\nu'_0=\nu_0\dfrac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ respectiv, $\nu_0=\nu'_0\dfrac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$.	0,5 p	
Ca urmare: $$\lambda=\lambda'\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$ Înlocuind λ' calculat anterior obținem: $$\lambda=\left(\lambda_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}+\frac{h}{m_0c}\frac{(1+\beta)(1-\cos\theta)}{1-\beta\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$	0,5 p	
Oficiu		**1,00**