

Soluție - Problema a III-a

A. Coeficient termic al rezistenței (5 puncte)

Conductivitatea electrică a materialelor σ în materiale în care conducția electrică este asigurată de electronii liberi depinde direct proporțional de concentrația n a purtătorilor de sarcină electrică și de mobilitatea acestora μ (mobilitatea este coeficientul de proporționalitate dintre viteza de drift a electronilor și intensitatea câmpului electric care determină apariția deplasării ordonate a purtătorilor de sarcină). Lărgimea benzii interzise E_g se definește ca energia necesară unui electron pentru a deveni liber în cristalul semiconductor (prin trecerea de pe cel mai înalt nivel energetic ocupat în banda de valență pe cel mai de jos nivel liber din banda de conducție). Această energie poate fi furnizată termic sau prin alte modalități. Pentru semiconductori puri, concentrația de purtători liberi crește puternic cu temperatura conform relației

$$n \approx T^{3/2} \cdot \exp(-E_g / (2k_B \cdot T)) \quad (1)$$

Tot pentru semiconductori puri, la temperaturi absolute T ridicate mobilitatea scade cu creșterea temperatura

$$\mu \sim T^{-3/2}. \quad (2)$$

În concluzie, rezistența electrică variază cu temperatura. Coeficientul termic al rezistenței α reprezintă variația relativă a rezistenței electrice raportată la o mică variație a temperaturii. Se presupun cunoscute: $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $h = 6,64 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Pentru germaniu pur, la temperaturi foarte joase, lungimea de undă de prag pentru apariția efectului fotoelectric este $\lambda_{\text{prag}} = 1,7 \mu\text{m}$

1. Determină lărgimea benzii interzise (exprimată în eV) a germaniului pur.
2. Determină coeficientul termic al rezistenței germaniului la temperatura camerei.

Soluție

1. Apariție efectului fotoelectric este legată de „eliberare” electronilor. Deoarece conform enunțului temperatura este foarte scăzută, energia furnizată de fotonii din infraroșu asigură energia necesară electronilor pentru eliberare.

Prin urmare

$$E_g = \frac{hc}{\lambda_{\text{prag}}} \quad (3)$$

Valoarea numerică este

$$\begin{cases} E_g = \frac{6,64 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1,7 \times 10^{-6}} = 1,17 \times 10^{-19} \text{ J} \\ E_g = 0,73 \text{ eV} \end{cases} \quad (4)$$

2. Conductivitatea electrică are expresia

$$\sigma = n \cdot e \cdot \mu = \aleph \cdot T^{3/2} \exp(-E_g / (2k_B \cdot T)) \cdot T^{-3/2} = \aleph \cdot \exp(-E_g / (2k_B \cdot T)) \quad (5)$$

unde \aleph nu depinde de temperatură.

Corespunzător, rezistivitatea electrică a materialului semiconductor intrinsec la temperaturi ridicate are expresia

$$\rho = \kappa^{-1} \cdot \exp(E_g / (2k_B \cdot T)). \quad (6)$$

Rezistența electrică are expresia

$$R = \frac{\ell}{S} \cdot \kappa^{-1} \cdot \exp(E_g / (2k_B \cdot T)) \quad (7)$$

Coefficientul termic al rezistenței se poate scrie ca

$$\alpha = \frac{1}{R(T)} \frac{R(T + \Delta T) - R(T)}{\Delta T} = \frac{1}{R(T)} \cdot \frac{dR}{dT} \quad (8)$$

Cum

$$\frac{dR}{dT} = \frac{\ell}{S} \cdot \kappa^{-1} \cdot \exp(E_g / (2k_B \cdot T)) \cdot \left(-\frac{E_g}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \right) \quad (9)$$

Se poate rescrie coeficientul termic al rezistenței ca

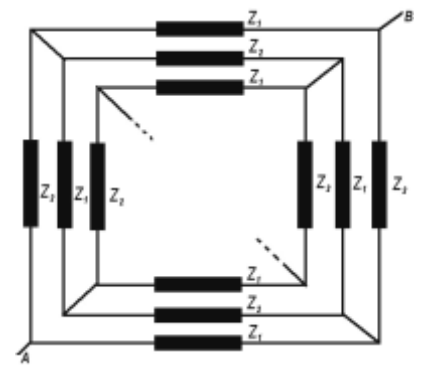
$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\ell}{S} \cdot \kappa^{-1} \cdot \exp(E_g / (2k_B \cdot T)) \cdot \left(-\frac{E_g}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \right) / \left(\frac{\ell}{S} \cdot \kappa^{-1} \cdot \exp(E_g / (2k_B \cdot T)) \right) \\ \alpha &= -\frac{E_g}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \\ \alpha &= -\frac{1}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_{\text{prag}}} \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Valoarea numerică a coeficientului termic este

$$\alpha = -\frac{1}{2 \times 1,38 \times 10^{-23}} \cdot \frac{1}{300^2} \cdot \frac{6,64 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1,7 \times 10^{-6}} \approx -0,047 \text{K}^{-1} \quad (11)$$

B. .. și circuit de curent alternativ (5 puncte)

Rețeaua din figură este alcătuită dintr-un număr care tinde la infinit de celule pătrate având pe laturi impedanțe Z_1 și Z_2 , legate în modul sugerat în desenul alăturat. Consideră situația în care impedanța Z_1 este o bobină (eventual reală) iar impedanța Z_2 este un condensator ideal. Circuitul este legat la o sursă de tensiune electrică alternativă pentru care valoarea instantanee a tensiunii are expresia $u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ - unde U este o constantă iar pulsația ω poate fi variată. Oricare ar fi valoarea inițială a pulsației, puterea reactivă a circuitului, necunoscută, rămâne neschimbată la dublarea pulsației. Puterea activă a circuitului are valoarea P .



a. Determină în funcție de Z_1 și Z_2 expresia impedanței echivalente Z_{AB} a rețelei.

b. Determină valoarea puterii reactive a circuitului

c. Determină expresiile impedanțelor Z_1 și Z_2 în funcție de P , U și $\omega_0 = 1/\sqrt{C \cdot L}$ (capacitatea C a condensatorului și inductanța L a bobinei care nu sunt cunoscute).

Soluție

a. Din invarianța impedanței la adăugarea unei noi celule rezultă că valoarea impedanței circuitului este

$$Z^2_{\text{echivalent}} = Z_1 \cdot Z_2$$

dacă

$$\begin{cases} \overline{Z_1} = R + jL\omega \\ \overline{Z_2} = -j/(C \cdot \omega) \\ \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} = \frac{L}{C} - j \frac{R}{C \cdot \omega} \end{cases} \quad (12)$$

iar

$$\overline{Z_{\text{echivalent}}} = R_e + X_e \cdot j \quad (13)$$

rezultă că

$$\begin{cases} \frac{L}{C} = R_e^2 - X_e^2 \\ -\frac{R}{C \cdot \omega} = 2R_e \cdot X_e \end{cases} \quad (14)$$

Ridicând la pătrat relațiile rezultă

$$\begin{cases} \left(\frac{L}{C}\right)^2 = R_e^4 + X_e^4 - 2R_e^2 \cdot X_e^2 \\ \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2 = 4R_e^2 \cdot X_e^2 \end{cases} \quad (15)$$

și în consecință

$$(R_e^2 + X_e^2) = \sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2} \quad (16)$$

astfel că

$$\begin{cases} R_e = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2} + \frac{L}{C} \right)} \\ X_e = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2} - \frac{L}{C} \right)} \end{cases} \quad (17)$$

b. Puterea reactivă are expresia

$$P_{\text{reactiv}} = \text{Im} \frac{U^2}{Z_{\text{echivalent}}} = \text{Im} \frac{U^2}{R_e + X_e \cdot j} = \text{Im} \frac{U^2(R_e - X_e \cdot j)}{R_e^2 + X_e^2} = \frac{-U^2 X_e}{R_e^2 + X_e^2} \quad (18)$$

$$P_{\text{reactiv}} = \frac{-U^2 X_e}{R_e^2 + X_e^2} = \frac{-U^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2} - \frac{L}{C} \right)}}{\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2}} \quad (19)$$

Dublarea frecvenței conduce la o nouă expresie a puterii reactive

$$P_{\text{reactiv}}(2\omega) = \frac{-U^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot 2\omega}\right)^2} - \frac{L}{C} \right)}}{\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot 2\omega}\right)^2}} \quad (20)$$

Care nu poate conduce la o aceeași valoare decât dacă

$$\frac{R}{C \cdot 2\omega} \equiv \frac{R}{C \cdot \omega} \quad (21)$$

ceea ce este posibil *numai* dacă

$$R \equiv 0 \quad (22)$$

Bobina din circuit este – prin urmare – ideală.
Impedanța echivalentă a circuitului este pur rezistivă și are valoarea

$$\overline{Z}_{\text{echivalent}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (23)$$

independentă de frecvență.

Puterea reactivă a circuitului este nulă pentru oricare frecvență.

$$P_{\text{reactiv}}(\omega) = 0 \text{ Var} \quad (24)$$

Puterea activă a circuitului are expresia

$$P = \frac{U^2}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (25)$$

Se poate scrie că

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U^2}{P} \\ \sqrt{C \cdot L} = 1/\omega_0 \end{cases} \quad (26)$$

astfel că

$$\begin{cases} L = \frac{U^2}{P \cdot \omega_0} \\ C = \frac{P}{U^2 \cdot \omega_0} \end{cases} \quad (27)$$

Soluție propusă de

Dr. Constantin COREGA , Liceul Emil Racoviță Cluj - Napoca

Dr. Adrian DAFINEI, Facultatea de Fizică, Universitatea din București