Soluţie - Problema a II-a

Rachete balistice

a. Din geometria desenului, deoarece triunghiul ONF_1, este dreptunghic isoscel, rezultă:

$$\neg ONF_1 = 45°;\ \neg ONB = \neg BNF_1 = 22{,}5°;$$

$$\alpha = 22{,}5°,$$

reprezentând unghiul dintre direcţia lansării rachetei balistice de la polul Nord şi direcţia orizontului locului, astfel încât racheta să aterizeze înr-un punct de pe ecuator.

Se ştie că: 1) suma distanţelor de la orice punct al unei elipse până la cele două focare este constantă, $2a$, reprezentând lungimea axei mari a elipsei; 2) tangenta într-un punct la o elipsă este perpendiculară pe bisectoarea unghiului format de direcţiile care trec prin acel punct şi prin focarele elipsei (proprietatea optică a elipsei); 3) energia totală a sistemului rachetă – Pământ, atunci când racheta evoluează pe o elipsă cu semiaxa mare a, având Pământul în unul din focare, este $E = -K\dfrac{mM}{2a}$, unde K - constanta atracţiei universale, m - masa rachetei, M - masa Pământului.

Polul Nord fiind un punct de pe elipsă, în acord cu definiţia elipsei, rezultă:

$$NF_1 + NF_2 = 2\alpha;$$

$$R\frac{\sqrt{2}}{2} + R = 2a;$$

$$a = \frac{R}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

reprezentând semiaxa mare a elipsei.

În acord cu legea conservării energiei mecanice a sistemului rachetă - Pământ, obţinem:

$$\frac{m\mathrm{v}_0^2}{2} - K\frac{mM}{R} = -K\frac{mM}{2a};$$

$$\mathrm{v}_0 = \sqrt{\frac{2KM}{R(\sqrt{2}+1)}};$$

$$g_0 = K\frac{M}{R^2};\quad \mathrm{v}_0 = \sqrt{\frac{2g_0R}{\sqrt{2}+1}},$$

reprezentând valoarea vitezei rachetei în momentul lansării de la polul Nord, pentru a putea ajunge, în condiţiile precizate, într-un punct de pe ecuator.

b. Deoarece apogeul A este un punct de pe elipsă, rezultă:

$$AF_1 + AF_2 = 2a;$$

$$AF_2 = R + h;\ AF_1 = AF_2 - R\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$h = \frac{R}{2}(\sqrt{2} - 1),$$

reprezentând altitudinea maximă a rachetei în zborul său balistic de la polul Nord până la ecuator.

În acord cu legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$\frac{m\mathrm{v}_{\min}^2}{2} - K\frac{mM}{R+h} = -K\frac{mM}{2a};$$

$$\mathrm{v}_{\min} = 2\sqrt{\frac{g_0 R}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)}}.$$

c. Din geometria desenului *b*, rezultă:

$$\angle ONF_1 = 60°;\ \angle ONB = \angle BNF_1 = 30°;$$

$$\alpha = 30°;$$

$$NF_1 + NF_2 = 2a;$$

$$a = \frac{3}{2}R.$$

Din legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$\mathrm{v}_0 = 2\sqrt{\frac{g_0 R}{3}};$$

$$h = \frac{R}{2}(\sqrt{3} + 1);$$

$$\mathrm{v}_{\min} = \sqrt{\frac{2g_0 R(3-\sqrt{3})}{3(3+\sqrt{3})}}.$$

d. Cele două rachete se vor deplasa pe orbite eliptice identice, fiecare orbită fiind tangentă la suprafaţa Pământului într-unul din polii geografici, centrul Pământului fiind în unul din focarele celor două elipse, aşa cum indică figura 1. Fiecare rachetă este lansată din perigeul elipsei. Distanţa maximă dintre cele două rachete se realizează atunci când fiecare rachetă ajunge în apogeul orbitei sale, ceea ce se întâmplă după un timp $t = T/2$.

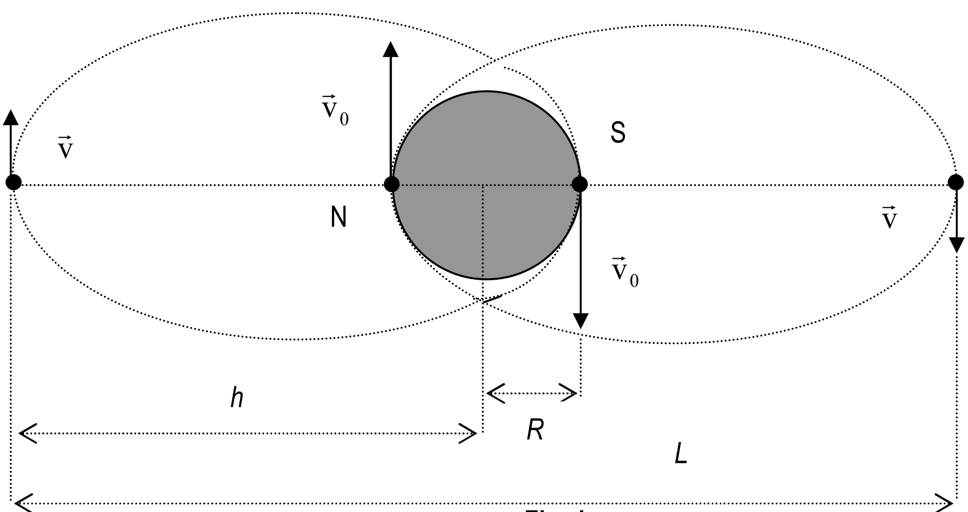

Fig. 1

Pentru mişcarea fiecărei rachete pe traiectoria sa eliptică, în acord cu legea a treia a lui Kepler, putem scrie că:

$$T^2 = k\left(\frac{h+R}{2}\right)^3,$$

relaţie care dovedeşte că perioada mişcării este aceeaşi pentru orice altă rachetă care se deplasează pe orice altă elipsă cu aceeaşi semiaxă mare, indiferent de semiaxa sa mică, deci, în particular şi pentru mişcarea unei rachete pe o traiectorie circulară a cărei rază este:

$$r = \frac{h+R}{2},$$

pentru care putem avem:

$$T = \frac{2\pi r}{\mathrm{v}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{KM}{r}}} = \frac{2\pi r}{R}\sqrt{\frac{r}{g_0}};$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{R^2 g_0 T^2}{4\pi^2}} = \frac{h+R}{2};\ h = \sqrt[3]{\frac{2R^2 g_0 T^2}{\pi^2}} - R,$$

astfel încât distanţa maximă dintre rachete este:

$$L = 2h = 2\left(\sqrt[3]{\frac{4R^2 g_0 t}{\pi^2}} - R\right).$$

e)

Barem de notare

	Parţial	Punctaj
		10
Oficiu		**1,00**

Soluţie propusă de
Prof. dr. Mihail Sandu Călimăneşti