



## Soluție - Problema I

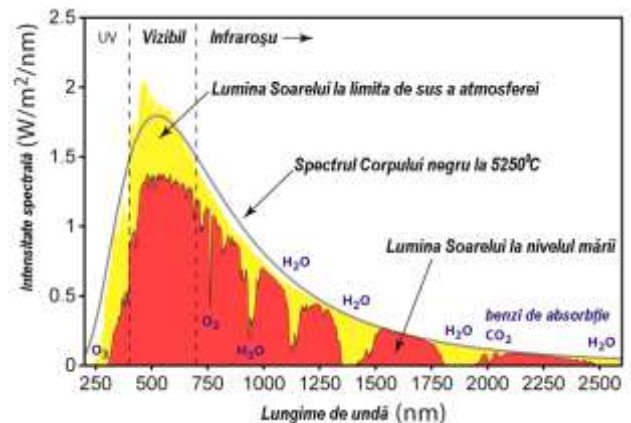
### Modelarea climei terestre (10 puncte)

Schimbarea climei și încălzirea globală, viețuirea speciei umane în condiții climaterice noi, au devenit subiecte de interes public în ultimele decenii.

La scară cosmică singurele fenomene care intervin în echilibrul energetic al Pământului sunt absorbția și emisia radiației. Se poate spune că starea climei terestre se datorează echilibrului delicat dintre energia pe care Pământul o iradiază spre spațiul cosmic și energia pe care planeta noastră o captează de la formidabila sursă de energie care este Soarele.

Un corp care absoarbe radiația electromagnetică ce ajunge la suprafața sa, indiferent de lungimea de undă a acestei radiații și care emite radiație electromagnetică în funcție de temperatura suprafeței sale se numește corp negru. Un corp negru emite energie cu o distribuție spectrală specifică, dependentă de temperatura proprie. Linia plină, lisă, din graficul din imaginea de mai sus evidențiază distribuția spectrală a emisie de energie a Soarelui (echivalent unui corp negru cu temperatura  $T_{\text{Soare}} = 5250^{\circ}\text{C}$ ).

Dacă  $I$  reprezintă energia totală (în întreg spectrul) emisă de unitatea de suprafață a unui corp negru în unitatea de timp, iar  $T$  este temperatura absolută a corpului negru, atunci legea Stefan – Boltzmann statuează că  $I = \sigma \cdot T^4$ . În această expresie  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  este constanta Stefan – Boltzmann.



**A.** Energia provenită de la Soare determină un flux energetic  $w_s = 1370 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , pe o sferă cu raza egală cu distanța de la Pământ la Soare. Utilizează o modelare simplă, în care energia este preluată de la Soare și este disipată de Pământul considerat un corp negru și determină temperatura  $T_p$  pe care ar avea-o Pământul, în conformitate cu acest model.

**B.** Modelarea simplă de la punctul A se bazează pe ipoteza că Pământul este un corp negru. Ipoteza este nerealistă, deoarece toate imaginile luate din spațiu arată Pământul ca un corp luminos. Atmosfera terestră (mai ales norii) reflectă aproximativ 24% din energia care vine de la Soare, iar suprafața Pământului (mai ales de zonele cu ghețuri) reflectă încă 6% din energia incidentă. Caracteristica numită albedo măsoară raportul dintre fluxul energetic reflectat și fluxul energetic incident. Consideră că albedo-ul terestru este  $A = 30\%$  și determină temperatura Pământului, utilizând un nou model, care ia în considerare reflexia parțială a luminii provenite de la Soare.

**C.** În timp ce Soarele emite energie mai ales în domeniul vizibil, temperatura relativ scăzută a suprafeței terestre face ca emisia Pământului să fie localizată în zona infraroșie a spectrului. O modelare mai atentă a climei ia în considerare proprietățile atmosferei. Aceasta este un amestec de gaze cu proprietăți absorbante specifice. Spectrul prezentat în imaginea de mai sus evidențiază că în diferite domenii spectrale unele dintre gazele atmosferice pot absorbi radiație. Caracterizarea absorbției pe domenii spectrale se poate face prin introducerea coeficienților de absorbție în vizibil  $\alpha_{\text{vis}}$  și respectiv în infraroșu  $\alpha_{\text{ir}}$ , exprimați prin raportul dintre energia care trece prin atmosferă și energia care pătrunde în atmosferă. Dacă radiația este complet absorbită atunci  $\alpha = 0$ , iar dacă radiația nu este absorbită de loc  $\alpha = 1$ . Determină temperatura Pământului  $T_p$  într-un model care se ia în considerare reflexia parțială a luminii provenite de la Soare (albedoul  $A = 0,3$ ) și proprietățile absorbante ale atmosferei ( $\alpha_{\text{vis}} = 0,8$  și  $\alpha_{\text{ir}} = 0,1$ ).

**D.** Folosind modelul de la punctul C calculează temperatura la suprafața Pământului, în situația în care albedoul și coeficienții de absorbție au valorile indicate în tabelul 1. Completează acest tabel cu valorile temperaturii la suprafața Pământului pe care le-ai obținut.

Caz	1	2	3	4
$w_s$	1370	1370	1370	1370
$\alpha_{vis}$	1	1	1	1
$\alpha_{ir}$	1	1	0	0
A	0,3	0	0	0,3
$T''_P$ (K)				
$T''_P$ (°C)				

Tabel 1

**E.** Presupune că distanța dintre Pământ și Soare ar crește cu 1%. Care ar fi temperatura Pământului în acest caz (conform modelului de la punctul C), dacă  $A = 0,3$ ,  $\alpha_{ir} = 0,3$  și  $\alpha_{vis} = 0,6$ .

**F.** Presupune că în urma unor explozii nucleare în Sahara o parte din nisip s-ar transforma într-o „ oglindă de sticlă”. Estimează suprafața pe care ar trebui să o aibă o astfel de oglindă pentru ca temperatura Pământului să scadă cu 1%. Folosește modelarea de la punctul C.

**G.** Într-o zi însorită de vară, la amiază vrei să aprinzi o bucată de hârtie concentrând razele de lumină provenite de la Soare cu ajutorul unei lupe cu distanța focală  $f = 150\text{mm}$  și diametrul  $D = 50\text{mm}$ .

Cunoscând:

- diametrul unghiular al Soarelui  $\alpha = 4,6\text{mrad}$ ;
- fluxul termic primit de Pământ de la Soare  $J_s = 1400\text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ;
- temperatura mediului înconjurător  $T_0 = 300\text{K}$ ;
- masa unității de suprafață a bucății de hârtie  $\rho_\sigma = 80\text{g} \cdot \text{m}^{-2}$ ;
- căldura specifică a hârtiei  $c = 10^3\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ;
- raportul dintre puterea absorbită și cea incidentă  $\gamma = 10^{-2}$ ;
- temperatura de aprindere a hârtiei  $T_{\text{aprinde}} = 505\text{K}$

estimează intervalul de timp după care foaia de hârtie se va aprinde.

### Soluție

**A.** Energia care vine de la Soare pe un „cerc mare” al Pământului, (suprafața efectivă expusă către Soare) trebuie să fie egalată de energia pe care Pământul, considerat sferă cu raza  $R_p$  și temperatura  $T_p$ , o emite la rândul său.

$$w_s \cdot \pi \cdot R_p^2 = 4\sigma \cdot T_p^4 \cdot \pi \cdot R_p^2 \quad (1)$$

de unde temperatura Pământului în această modelare este

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{w_s}{4\sigma}} \quad (2)$$

cu valoarea numerică

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{1370}{4 \times 5,67 \times 10^{-8}}} \cong 279\text{K} = 6^\circ\text{C} \quad (3)$$

Răspunsul, deși în domeniul de temperaturi rezonabile la suprafața Pământului, este nerealist pentru o descriere acurată a climei. Un răspuns acceptabil ar fi o temperatură de aproximativ  $16^\circ\text{C}$ .

**B.** Energia care vine de la Soare pe un „cerc mare” al Pământului, (suprafața efectivă expusă către Soare) este parțial reflectată. Astfel,  $1 - A = 70\%$  din energia Soarelui este absorbită la suprafața Pământului și trebuie să fie egalată de energia pe care Pământul, considerat sferă cu raza  $R_p$  și cu temperatura  $T_p'$ , o emite la rândul său.

$$0,7 \times w_s \cdot \pi \cdot R_p^2 = 4\sigma \cdot T_p'^4 \cdot \pi \cdot R_p^2 \quad (4)$$

de unde temperatura Pământului în această modelare este

$$T_p' = \sqrt[4]{\frac{0,7 \times w_s}{4\sigma}} \quad (5)$$

cu valoarea numerică

$$T_p' = \sqrt[4]{\frac{0,7 \times 1370}{4 \times 5,67 \times 10^{-8}}} \cong 255\text{K} = -18^\circ\text{C} \quad (6)$$

Rezultatul acestei modelări, evident nerealist trebuie corijat printr-o altă modelare.

**C.** În condițiile considerate, energia care ajunge la suprafața Pământului venind de la Soare este  $E_s$

$$E_s = \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} \quad (7)$$

Energia  $E_p$  reemisă de Pământul considerat corp negru la temperatura  $T_p''$  este

$$E_p = 4\pi \cdot \sigma \cdot R_p^2 \cdot T_p''^4 \quad (8)$$

Datorită gazelor care absorb radiația din infraroșu, (gaze cu efect de seră), o parte  $E_a$  din energia radiată de Pământ este absorbită în atmosferă.

Bilanțul energetic la suprafața Pământului conduce – în această modelare – la următoarea expresie

$$\begin{cases} E_s + E_a = E_p \\ \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_a = 4\pi \cdot R_p^2 \cdot \sigma \cdot T_p''^4 \\ (w_s/4) \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_a / (4\pi \cdot R_p^2) = T_p''^4 \cdot \sigma \end{cases} \quad (9)$$

La limita de sus a atmosferei

$$\begin{cases} E_p \cdot \alpha_{ir} + E_a = \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \\ 4\pi \cdot R_p^2 \cdot \sigma \cdot T_p''^4 \cdot \alpha_{ir} + E_a = \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \\ \sigma \cdot T_p''^4 \cdot \alpha_{ir} + E_a / (4\pi \cdot R_p^2) = (w_s/4) \cdot (1 - A) \end{cases} \quad (10)$$

Din relațiile de mai sus rezultă

$$\begin{cases} (w_s/4) \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_a / (4\pi \cdot R_p^2) = T_p''^4 \cdot \sigma \\ (w_s/4) \cdot (1 - A) - E_a / (4\pi \cdot R_p^2) = \sigma \cdot T_p''^4 \cdot \alpha_{ir} \\ (w_s/4) \cdot (1 - A) (\alpha_{vis} + 1) = \sigma \cdot T_p''^4 \cdot (\alpha_{ir} + 1) \end{cases} \quad (11)$$

Și prin urmare

$$T_p'' = \sqrt[4]{\frac{(w_s/4) \cdot (1 - A) (\alpha_{vis} + 1)}{\sigma (\alpha_{ir} + 1)}} \quad (12)$$

cu valoarea numerică

$$T_p'' = \sqrt[4]{\frac{(1370/4) \cdot 0,7 \cdot \frac{1,8}{1,1}}{5,67 \times 10^{-8}}} \cong 288,4\text{K} = 15,4^\circ\text{C} \quad (13)$$

D.

Caz	1	2	3	4
$w_s$	1370	1370	1370	1370
$\alpha_{vis}$	1	1	1	1
$\alpha_{ir}$	1	1	0	0
A	0,3	0	0	0,3
$T''_P$ (K)	255	279	331	303
$T''_P$ (°C)	-19	5	57	29

E. Deoarece energia provenită de la Soare se împrăștie pe o suprafață de  $4\pi \cdot (1,01 \times R)^2$ , noua constantă solară  $w'_s$  verifică relația

$$4\pi \cdot (1,01 \times R)^2 \cdot w'_s = 4\pi \cdot (R)^2 \cdot w_s \quad (14)$$

și prin urmare

$$w'_s = \frac{w_s}{(1,01)^2} \quad (15)$$

cu valoarea numerică

$$w'_s = 1343W \cdot m^{-2} \quad (16)$$

Pentru noua situație

$$\left\{ \begin{array}{l} T''_P = \sqrt[4]{\frac{(w'_s/4)}{\sigma} \cdot (1-A) \frac{(\alpha_{vis} + 1)}{(\alpha_{ir} + 1)}} \\ T''_P = \sqrt[4]{\frac{(1343/4)}{5,67 \times 10^{-8}} \cdot 0,7 \frac{1,6}{1,3}} \\ T''_P \cong 267K = -6^\circ C \end{array} \right. \quad (17)$$

F. Existența oglinzii cu suprafața  $s = x \cdot \pi \cdot R_p^2$  conduce la scăderea suprafeței „de captură” a energiei solare la valoarea  $\pi \cdot R_p^2 \cdot (1 - x/2)$  și de asemenea la scăderea suprafeței emițătoare la valoarea  $\pi \cdot R_p^2 \cdot (4 - x)$ . În modelarea aproximativă, descrisă la punctul C, bilanțul energetic la suprafața Pământului este

$$\left\{ \begin{array}{l} E_s + E_a = E_p \\ \pi \cdot R_p^2 (1 - x/2) \cdot w_s \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_A = \pi \cdot R_p^2 \cdot (4 - x) \cdot \sigma \cdot T_{P,Sahara}^4 \\ (w_s) \cdot (1 - A) \cdot (1 - x/2) \cdot \alpha_{vis} + E_A / (\pi \cdot R_p^2) = T_{P,Sahara}^4 \cdot (4 - x) \cdot \sigma \end{array} \right. \quad (18)$$

La limita de sus a atmosferei

$$\left\{ \begin{array}{l} E_p \cdot \alpha_{ir} + E_a = \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \\ \pi \cdot R_p^2 (4 - x) \cdot \sigma \cdot T_{P,Sahara}^4 \cdot \alpha_{ir} + E_A = \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ \sigma \cdot T_{P,Sahara}^4 \cdot \alpha_{ir} \cdot (4 - x) + E_A / (\pi \cdot R_p^2) = (w_s/4) \cdot (1 - A) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) \end{array} \right. \quad (19)$$

Din relațiile de mai sus rezultă

$$\begin{cases} w_s \cdot (1 - A) \cdot (1 - x/2) \cdot \alpha_{vis} + E_A / (\pi \cdot R_p^2) = T_{P, Sahara}''^4 \cdot (4 - x) \cdot \sigma \\ w_s \cdot (1 - A) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sigma \cdot T_{P, Sahara}''^4 \cdot \alpha_{ir} \cdot (4 - x) + E_A / (\pi \cdot R_p^2) \\ w_s \cdot (1 - A) (\alpha_{vis} + 1) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sigma \cdot T_{P, Sahara}''^4 \cdot (\alpha_{ir} + 1) \cdot (4 - x) \end{cases} \quad (20)$$

Și prin urmare

$$T_{P, Sahara}'' = \sqrt[4]{\frac{w_s \cdot (1 - A) \cdot (\alpha_{vis} + 1)}{\sigma} \cdot \frac{1 - x/2}{(\alpha_{ir} + 1) \cdot (4 - x)}} \quad (21)$$

Temperatura trebuie să scadă cu 1°C adică trebuie să aibă valoarea 287,4K

În aceste condiții

$$\begin{cases} \frac{T_{P, Sahara}''}{T_P''} = \sqrt[4]{\frac{1 - x/2}{1 - x/4}} \\ \frac{1 - x/2}{1 - x/4} = \left(\frac{T_{P, Sahara}''}{T_P''}\right)^4 = k \end{cases} \quad (22)$$

Cu valoarea numerică

$$k = 0,9862 \quad (23)$$

rezultă că

$$x = 0,0544 \quad (24)$$

Valoarea absolută a suprafeței vitroase este

$$s = x \cdot \pi \cdot R_p^2 \quad (25)$$

$$s = 0,0544 \times \pi \times 6400^2 \cong 7 \times 10^6 \text{ km}^2$$

Suprafața Saharei este de  $9 \times 10^6 \text{ km}^2$ .

**G.** Problema propune estimarea intervalul de timp necesar încălzirii unei porțiuni dintr-o bucată de hârtie, până la temperatura de aprindere. Încălzirea se realizează utilizând o lupă care focalizează lumina solară într-o zonă de mici dimensiuni de pe bucata de hârtie.

Presupune că Soarele este sferic și plasat la infinit; astfel imaginea acestuia formată cu ajutorul lupei va fi un disc, situat în planul focal al lupei. Dacă se așează bucata de hârtie chiar în planul focal al lupei, atunci pe aceasta se va forma un disc luminos cu raza minimă  $R_0$ .

Ținând cont că distanța focală a lupei este  $f$  și că diametrul unghiular sub care se vede Soarele este  $\alpha$ , raza  $R_0$  a discului luminos format în planul focal al lupei are expresia

$$R_0 \cong \frac{f \cdot \alpha}{2} \quad (26)$$

Notează cu  $P_c$  puterea termică provenită de la Soare și colectată de lupa de diametru  $D$

$$P_c = J_s \frac{\pi D^2}{4} \quad (27)$$

Din această putere, bucata de hârtie absoarbe cantitatea  $P_{abs}$

$$P_{abs} = \gamma P_c \quad (28)$$

a cărei expresie se obține din combinarea relațiilor (27) și (28)

$$P_{abs} = \gamma \cdot J_s \cdot \frac{\pi D^2}{4} \quad (29)$$

Reține că această putere revine numai acelei porțiuni din bucata de hârtie care este iluminată de lupă. Masa acestei porțiuni din bucata de hârtie este

$$m = \rho_{\sigma} \pi R_0^2 \quad (30)$$

La momentul de timp  $t_0 = 0$ , la care începe iluminarea bucății de hârtie cu ajutorul lupei, energia termică inițială  $U_0$  înmagazinată în zona cu aria  $\pi R_0^2$  din bucata de hârtie aflată la temperatura mediului ambiant  $T_0$  are expresia

$$U_0 = \rho_{\sigma} \pi R_0^2 c T_0 \quad (31)$$

La momentul de timp  $t$  de la începerea iluminării bucății de hârtie, temperatura acesteia în zona spotului luminos devine  $T(t)$ , iar energia termică înmagazinată în respectiva zonă are expresia

$$U(t) = \rho_{\sigma} \pi R_0^2 c T(t) \quad (32)$$

Întrucât

$$\frac{dU}{dt} = P_{abs} \quad (33)$$

se obține

$$U(t) = U_0 + P_{abs} \cdot t \quad (34)$$

Combinând relațiile (31), (32) (33) și (34) rezultă dependența de timp a temperaturii bucății de hârtie în zona spotului luminos

$$T(t) = T_0 + \frac{P_{abs}}{\rho_{\sigma} \pi R_0^2 c} \cdot t \quad (35)$$

Din relația (35) se observă că temperatura  $T(t)$  a hârtiei în zona spotului luminos este la un moment dat cu atât mai mare cu cât raza  $R_0$  a spotului luminos este mai mică. Aceasta justifică de ce bucata de hârtie ar trebui așezată chiar în planul focal al lupei.

Intervalul de timp de la începutul focalizării luminii pe bucata de hârtie până la aprinderea acesteia, notat prin  $\tau_{aprinde}$  se obține din relația (35), punând condiția ca

$$T = T_{aprinde} \quad (36)$$

Acest interval de timp are expresia

$$\tau_{aprinde} = \frac{\rho_{\sigma} \pi R_0^2 c}{P_{abs}} (T_{aprinde} - T_0) \quad (37)$$

$$\tau_{aprinde} = \frac{\rho_{\sigma} f^2 \alpha^2 c}{\gamma J_S D^2} (T_{aprinde} - T_0) \quad (38)$$

Efectuând calculul numeric, pe baza estimării de mai sus se obține

$$\tau_{aprinde} \cong 0,25s \quad (39)$$

**Observații:**

*Pentru soluționarea punctului G s-au făcut următoarele presupuneri:*

- se neglijează absorbția luminii în sticla din care este confecționată lupa
- incidența normală a luminii pe lupă
- temperatura bucății de hârtie se modifică numai în zona în care este lumina focalizată de lupă determină apariția spotului luminos pe hârtie
- restul bucății de hârtie, deși este iluminată direct de la Soare (și absoarbe o anumită putere) nu-și modifică temperatura

*Soluție propusă de:*

*Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației Cercetării și Inovării*