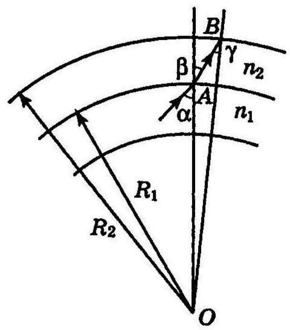
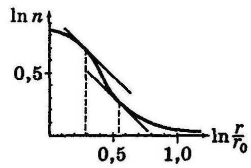
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Subiect		Răspunsuri	Punctaj parțial	Punctaj
1.	A.	Să considerăm în interiorul mediului cu simetrie sferică două straturi vecine, suficient de subțiri, cu indicii de refracție n_1 şi n_2, şi razele de curbură exterioare ale acestora R_1 şi R_2 (desen) 	0,5	4,5
		Legea refracției (în punctul A) pentru o rază de lumină ce trece dintr-un strat în următorul este (vezi figura) $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$	0,75	
		Utilizând teorema sinusurilor în triunghiul OAB putem scrie $\sin\gamma / \sin\beta = R_1 / R_2$ şi de aici rezultă $\sin\beta = (R_2/R_1)\sin\gamma$.	0,5	
		Revenind în legea refracției obținem proprietatea de invarianță $n_1 R_1 \sin\alpha = n_2 R_2 \sin\gamma$	0,75	
		Aşadar, la propagarea printr-un mediu cu simetrie sferică în care indicele de refracție variază continuu mărimea $Rn(R)\sin\varphi(R)$ rămâne constantă (invariabilă)	0,5	
		În cazul dependenței n(R) din enunț avem $\frac{n_0}{R_0} R^2 \sin\varphi(R) = \text{const}$. Aici, factorul R_0/n_0 poate fi înglobat în constanta din membru drept şi invariantul are forma $R^2 \sin\varphi(R) = \text{const}$.	0,5	
		Pentru „peri-centru” unde $R = R_{min}$ vom avea $\varphi = 90^0$ şi din relația de invarianță $R_1^2 \sin 30^0 = R_{min}^2 \sin 90^0$ rezultă $R_{min} = R_1\sqrt{\sin 30^0} = R_1/\sqrt{2} = 70{,}71\text{cm}$.	0,75	
		Se observă că $R_{min} > R_0$.	0,25	
	B.	În locul conceptului de „rază de lumină” se poate raționa considerând un fascicul luminos foarte îngust. Dacă el se propagă pe un semicerc de rază r, proiecția frontului său de undă (plan de fază constantă, perpendicular pe fascicul), trebuie să treacă prin centrul semicilindrului în orice moment (la intrare, pe parcurs şi la ieşire)	1	4,5
		Aceasta înseamnă că drumul optic al tuturor razelor din acest fascicul foarte îngust trebuie să fie acelaşi, adică $\pi r . n(r) = \text{const.}$	1	
		Logaritmul natural al acestei relații ne dă $\ln(r/r_0) + \ln n(r) = K$. Aici $r_0 = 1\text{ cm}$, constanta K înglobându-l şi pe $\ln\pi$. Cu $Y = \ln n(r)$ şi $X = \ln(r/r_0)$ avem ecuația $Y = -X + K$, adică o dreaptă paralelă cu a doua bisectoare	1	
		Folosind hârtia milimetrică putem găsi cele două locuri în care tangenta la curba din enunț este paralelă cu a doua	1	

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Subiect		**Răspunsuri**	**Punctaj parțial**	**Punctaj**
		bisectoare: $\ln(r_1/r_0)=0,27\pm0,02$ şi $\ln(r_1/r_0)=0,54\pm0,02$ 		
		Din aceste valori rezultă imediat că $r_1=(1,31\pm0,03)$ cm, respectiv $r_2=(1,70\pm0,02)$ cm.	**0,5**	
Pentru corectori: Se admit ca fiind corecte (dacă sunt argumentate ca mai sus) valori numerice din intervalele $[1,25\text{cm}-1,37\text{ cm}]$, respectiv $[1,64\text{ cm}-1,76\text{ cm}]$.				
Oficiu				**1**
Total Subiect 1				**10**
2	**A**	Diferența de timp t_1-t_2 este dublul timpului de cădere pe verticală, pe distanța foarte mică $h=\alpha\ell$. Putem scrie $\alpha\ell=\frac{g}{2}\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)^2$. De aici $\alpha=\frac{g\left(t_1-t_2\right)^2}{8\ell}$. În rezolvare am ținut cont de faptul că unghiul α este mic şi că nu există frecare	**1**	**1**
	B	Fie g_0 accelerația gravitațională a locului unde se realizează experimentele. Putem scrie $T_0=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_0}}$, respectiv $T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_1}}$. De aici $\frac{T_1}{T_0}=\left(\frac{g_0}{g_1}\right)^{1/2}$ adică $g_1=g_0\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2$	**0,5**	
		Forța magnetică având acelaşi suport vertical ca şi greutatea $m\vec{g}_0$ este egală cu diferența dintre mg_1 şi mg_0. Obținem uşor că $F_m=mg_0[\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2-1]$	**0,5**	
		Când forța magnetică acționează orizontal, poziția de echilibru a pendulului este deviată spre dreapta (față de verticală) sub unghiul θ dat de relația $tg\theta=\frac{F_m}{mg_0}$. Forța longitudinală care tensionează firul pendulului este $F_{rez}=\sqrt{\left(mg_0\right)^2+F_m^2}$.	**0,5**	**2,5**
		De data aceasta, rolul lui g_1 din formula perioadei de oscilație în joacă $g_2=\frac{F_{rez}}{m}=\sqrt{g_0^2+\left(\frac{F_m}{m}\right)^2}$, putând scrie $g_2=g_0(T_0/T_2)^2$. Din cele două expresii rezultă imediat că $F_m=mg_0\sqrt{(T_0/T_2)^4-1}$	**0,5**	
		Acum putem scrie $\cos\theta=1/\sqrt{1+tg^2\theta}=(T_2/T_0)^2$	**0,5**	
	C	Legea II Newton ne permite să scriem ecuația diferențială a oscilațiilor liniare amortizate sub forma $\ddot{x}+(r/m)\dot{x}+(k/m)x=0$. Folosind notațiile $\Omega=\sqrt{k/m}$, $b=r/2m$, în care b se numeşte ***„coeficient de amortizare”*** iar Ω este ***„pulsația***	**1**	

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Subiect		Răspunsuri	Punctaj parțial	Punctaj
		proprie", avem $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \Omega^2 x = 0.$ Soluția ecuației diferențiale, în cazul amortizării slabe (pseudooscilațiilor), este $x(t) = A_0 e^{-bt}\sin(\omega t + \varphi_0)$, cu $\omega \equiv \sqrt{\Omega^2 - b^2}$ (pseudopulsație); A_0 şi φ_0 sunt constante de integrare		
		Avem $x(t)/x(t+T) = e^{bT} \equiv e^{D}$, în care mărimea adimensională introdusă $D \equiv bT = b(2\pi/\omega) = 2\pi b/\sqrt{\Omega^2 - b^2}$ se numeşte ***„decrement logaritmic al amortizării"***. Inversând relația găsim $b = r/2m = \Omega D/\sqrt{(2\pi)^2 + D^2}$	**0,75**	**3.5**
		1). Pentru D_0 avem $b_0 = r_0/2m,$ şi $b_0 = r_0/2m = \Omega D_0/\sqrt{(2\pi)^2 + D_0^2}$. Trecând de la r_0 la $r = nr_0$ avem $D = 2\pi n b_0/\sqrt{\Omega^2 - n^2 b_0^2} = 2\pi/\sqrt{\Omega^2(4\pi^2 + D_0^2)/n^2\Omega^2 D_0^2 - 1}$ sau, echivalent, $D = 2\pi n D_0/\sqrt{4\pi^2 + (1-n^2)D_0^2}$, (*) . Cu $n = 2$ şi $D_0 = 3/2$, găsim $D = 12\pi/\sqrt{16\pi^2 - 27} \approx 3{,}3.$	**1**	
		2). Observăm că $D \to \infty$ când se anulează numitorul relației (*), adică pentru $n = \sqrt{1 + (2\pi/D_0)^2}$. Cu datele din enunț $n = \sqrt{1 + 16\pi^2/9} \approx 4{,}3.$	**0,75**	
	D	Conform legii Hooke-Young constanta de elasticitate a unei bare este dată de formula $k = SE/\ell$, în care E este modulul de elasticitate al materialului, S este este secțiunea transversală iar ℓ este lungimea. De aici putem desprinde concluzia că, dimensional, constanta k este direct proporțională cu o ***„lungime caracteristică"*** d a corpului investigat. Pe această bază vom scrie relația $k = CEd$, în care C este o constantă adimensională	**0,5**	**2**
		În cazul celor două resorturi confecționate din acelaşi material $E_1 = E_2$, adică putem scrie relația $k_1/d_1 = k_2/d_2$, sau, echivalent, $k_2/k_1 = d_2/d_1$. Din enunț constatăm că raportul diametrelor exterioare ale resorturilor (9/3 =3) ca şi raportul diametrelor sârmelor din care s-au „bobinat" ele (0,6/0,2=3) este acelaşi. Rezultă că dacă al doilea resort ar avea lungimea doar de 3 cm (şi nu de 7 cm, cum este în realitate), el ar avea constanta de elasticitate $k_2' = 3k_1 = 42\ \mathrm{N/m}.$	**0,75**	
		În realitate, având lungimea mai mare, de 7 cm, constanta sa de elasticitate este egală cu fracțiunea 3/7 din valoarea ce ar corespunde totalei echivalențe: $k_2 = (3/7)k_2' = 18\ \mathrm{N/m}.$ ***Observație:*** Ultimul pas al raționamentului poate fi argumentat şi cu ajutorul formulei $k^{-1} = \sum_{j=1}^{n} k_j^{-1}$, cu care se determină constanta echivalentă a n resoarte diferite legate în serie. Să o aplicăm în două situații diferite, când al doilea resort din enunțul problemei, în loc să aibă lungimea de 7 cm, ar avea	**0,75**	

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Subiect	Răspunsuri	Punctaj parțial	Punctaj
	lungimea de: **a).** 6 cm, respectiv , **b).** de 9 cm. Deoarece, în cazul **a).**, scriind 6 cm=3 cm+3 cm, putem considera ca ar fi vorba de două resoarte identice (cu constanta de elaticitate $k'_2 = 42\ N/m$) legate în serie ; astfel ar rezulta $k_{echivalent} = k'_2/2 = 21\ N/m.$ În cazul **b).**, scriind că 9 cm=3 cm+3 cm+3 cm, avem de-a face cu trei resoarte identice înseriate şi, corespunzător, $k_{echivalent} = k'_2/3 = 14\ N/m.$ Mai departe, pentru acest resort putem scrie că 9 cm =6 cm + 1cm +1 cm + 1cm, adică $1/k_{(9)} = 1/k_{(6)} + 3(1/k_{(1)})$. De aici rezultă imediat $k_{(1)} = 3.42 = 126\ N/m.$ Mai departe, deoarece 7 cm = 6 cm + 1 cm putem scrie $1/k_{(7)} = 1/k_{(6)} + 1/k_{(1)}$, astfel încât $k_{(7)} = k_{(1)}k_{(6)}/(k_{(1)} + k_{(6)}) = (3/7).42 = 18\ N/m.$ Acum se constată că valoarea găsită, de 18 N/m, este o valoare cuprinsă între 14 N/m şi 21 N/m , deoarece raportul 7/3=2,33(3) este cuprins între 2 şi 3.		
Oficiu			**1**
Total Subiect 2			**10**
3	**a)** Proiecția ecuației de mişcare $md(\vec{v}\gamma)/dt = \vec{F}$ pe axele de coordonate ne conduce la relațiile $md(v_x\gamma)/dt = 0$, respectiv $md(v_y\gamma)/dt = -F$. Aici m este masa de repaus iar $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ cu $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Prin integrare (ținând cont şi de condițiile inițiale) găsim $mv_x\gamma = p_0 \cos\theta$, respectiv $mv_y\gamma = p_0 \sin\theta - F$, unde $p_0 = mv_0/\sqrt{1-\beta_0^2}$. Rezolvând sistemul obținem componentele carteziene ale vitezelor: $v_x(t) = (cp_0\cos\theta)/N^{1/2}$**,** respectiv $v_y(t) = (cp_0 \sin\theta - tcF)/N^{1/2}$**,** cu $N = m^2c^2 + p_0^2 + t^2F^2 - 2tFp_0 \sin\theta$	**1,5+1,5**	**3**
	b) Rezultă imediat că $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c\dfrac{\sqrt{p_0^2 + t^2F^2 - 2tFp_0 \sin\theta}}{N^{1/2}}$	**1**	**1**
	c) Prin derivări simple ($\vec{a} = d\vec{v}/dt$) obținem $a_x(t) = [cFp_0 \cos\theta(p_0 \sin\theta - tF)]/N^{3/2}$**,** respectiv $a_y(t) = -[cF\cos\theta(m^2c^2 + p_0^2\cos^2\theta)]/N^{3/2}$	**0,75+0,75**	**1,5**
	d)Având în vedere că $d\vec{r}(t) = \vec{v}(t)dt$, prin integrări nu prea complicate (ținând cont şi de condițiile inițiale) obținem destul de	**1,5+1,5**	**3**

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Subiect	**Răspunsuri**	**Punctaj parțial**	**Punctaj**
	uşor componentele carteziene ale vectorului de poziţie: $x(t)=\frac{cp_0\cos\theta}{F}\ln\left\{\frac{\sqrt{E_0^2+t^2F^2c^2-2tFp_0c^2\sin\theta}+tcF-cp_0\sin\theta}{E_0-cp_0\sin\theta}\right\}$, respectiv $y(t)=\frac{1}{F}\left\{E_0-\sqrt{E_0^2+t^2c^2F^2-2tc^2p_0F\sin\theta}\right\}$		
	Din ultimele relații, prin eliminarea timpului, găsim ecuația traiectoriei $y(x)=\frac{E_0}{F}-\frac{E_0}{F}ch\left(\frac{xF}{cp_0\cos\theta}\right)+\frac{cp_0\sin\theta}{F}sh\left(\frac{xF}{cp_0\cos\theta}\right)$	**0,5**	**0,5**
Oficiu			**1**
Total Subiect 3			**10**
Total Subiecte 1 + 2 + 3			**30**

Probleme selecționate şi propuse de: prof. univ. dr.Florea Uliu - Universitatea din Craiova,
prof.dr.Mihail Sandu-Grup Scolar Economic, Administrativ şi de Servicii Călimăneşti,
prof. Liviu Arici - C.N. „N.Bălcescu”- Brăila.