Problema IV – Bară în mişcare (10 puncte)

4.1. Descrierea situației fizice din problemă.

O cameră obscură având deschiderea (diafragma) situată la $x = 0$ şi la distanța D de axa Ox formează imaginea unei bare în mişcare, produsă de raze ajunse simultan la diafragma care se deschide pentru un interval de timp foarte scurt. Pe axa Ox sunt trasate marcaje echidistante aşa cum este ilustrat în **Figura IV.1**, care permit ca lungimea aparentă a barei să fie determinată din imaginea dată de camera obscură. Pe o imagine luată atunci când bara este în repaus, lungimea acesteia este L. Pentru considerațiile care urmează, bara nu este în repaus, ci se mişcă uniform, de-a lungul axei Ox, cu viteza constantă v.

4.2. Relații de bază.

Pe o imagine luată cu dispozitivul descris se observă un segment foarte scurt de pe bară, aflat în poziția notată cu $\tilde{x}$.

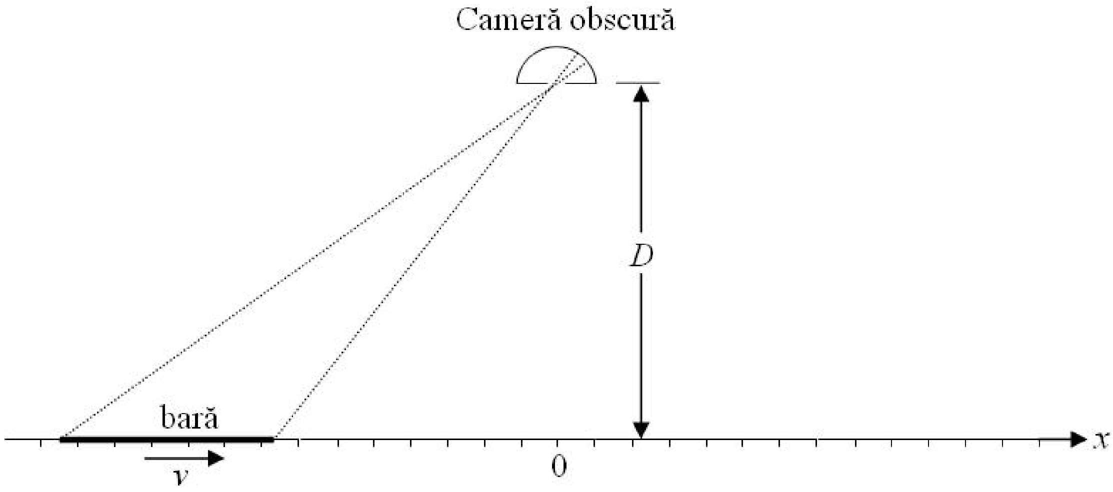

Figura IV. 1

IV.1 Care este poziția actuală x a acestui segment foarte scurt în momentul în care imaginea sa se formează în camera obscură? Exprimă răspunsul în funcție de $\tilde{x}$, D, L, v şi de viteza luminii în vid $c = 3{,}00 \times 10^{8}\, m \cdot s^{-1}$.
Foloseşte mărimile

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\upsilon}{c} \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad (4.1)$$

dacă ele te ajută să exprimi rezultatul într-o formă mai simplă.

IV.2. Găseşte relația inversă, adică exprimă $\tilde{x}$ în funcție de x, D, L, v şi c.

Notă: *Poziția actuală este poziția în sistemul de referință în care camera este în repaus.*

4.3. Lungimea aparentă a barei

Camera obscură formează o imagine în momentul în care centrul acesteia este într-un punct x_0.

IV.3 Determină lungimea aparentă a barei pe această imagine în funcție de mărimile date.

IV.4 Decide care dintre comportamentele propuse descrie în realitate variația lungimii aparente a barei ca funcție de timp .

a Întâi creşte, atinge o valoare maximă, apoi descreşte
b Întâi descreşte, atinge o valoare minimă, apoi creşte
c Descreşte tot timpul
d Creşte tot timpul

4.4. O imagine simetrică

Într-una dintre imaginile luate de camera obscură capetele barei se află la aceeaşi distanță de diafragma camerei obscure.

IV.5 Determină lungimea aparentă a barei în această imagine.
IV.6 Determină poziția actuală a mijlocului barei în momentul în care s-a obținut această imagine.
IV.7 Determină poziția mijlocului barei în imagine.

4.5. Imagini foarte timpurii şi foarte târzii.

Camera obscură ia o imagine timpurie a barei atunci când aceasta este foarte departe şi se apropie, şi o altă imagine foarte târzie, atunci când bara este foarte departe şi se îndepărtează de cameră. Pe una dintre aceste imagini lungimea aparentă a barei este de $1{,}00m$ iar pe alta este de $3{,}00m$.

IV.8 Decide care dintre afirmațiile de mai jos este corectă
a. Lungimea aparentă este de $1{,}00m$ pe imaginea timpurie şi de $3{,}00m$ pe imaginea târzie.
b. Lungimea aparentă este de $3{,}00m$ pe imaginea timpurie şi de $1{,}00m$ pe imaginea târzie.
IV.9 Determină viteza v de deplasare a barei.
IV.10 Determină lungimea L a barei în repaus.
IV.11 Determină lungimea aparentă a barei în imaginea simetrică.

4.6. Soluție la „Relații de bază”.

Imaginea apărută în camera obscură se datorează razelor de lumină care *ajung* în acelaşi moment şi nu razelor de lumină care *pleacă* simultan. Din acest motiv apare diferența dintre imaginea aparentă a unui punct de pe bară şi poziția actuală, la momentul în care se formează imaginea, a punctului de pe bară.
Segmentul foarte scurt de pe bară, aflat în poziția notată cu $\tilde{x}$ apare pe imaginea din camera obscură dacă lumina provenită de la el a plecat înainte de momentul luării imaginii cu timpul T având expresia

$$T = \frac{\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}}{c} \qquad (4.2)$$

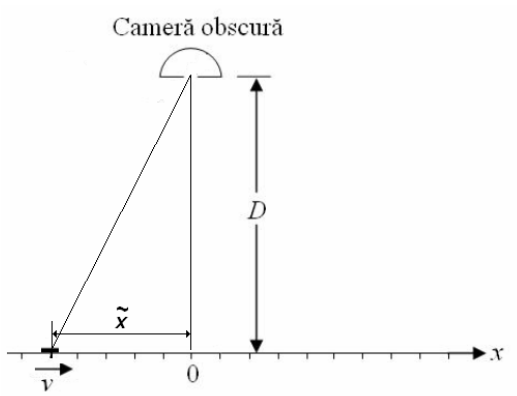

Figura IV. 2

În timpul necesar luminii să ajungă de la segmentul elementar la camera obscură, segmentul s-a deplasat pe distanța $v \cdot T$ astfel că „poziția actuală” a segmentului la momentul la care este luată imaginea sa este

$$x = \tilde{x} + v \cdot T = \tilde{x} + \frac{v}{c}\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2} = \tilde{x} + \beta \cdot \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2} \qquad (4.3)^*$$

Segmentul care se afla în poziția $\tilde{x}$ este apare pe imagine atunci când este în poziția x.
*(Relația de mai sus reprezintă răspunsul la întrebarea **IV.1**)*
Prin ridicarea la pătrat a relației de mai sus rezultă succesiv

$$\begin{cases} x^2 - 2x \cdot \tilde{x} + \tilde{x}^2 = \beta^2 \cdot D^2 + \beta^2 \cdot \tilde{x}^2 \\ \left(1-\beta^2\right)\tilde{x}^2 - 2x \cdot \tilde{x} + \left(x^2 - \beta^2 \cdot D^2\right) = 0 \\ \left(1-\beta^2\right)\tilde{x}^2 - 2x \cdot \tilde{x} + \left(x^2 - D^2 + \left(1-\beta^2\right) \cdot D^2\right) = 0 \\ \dfrac{\tilde{x}^2}{\gamma^2} - 2x \cdot \tilde{x} + \left(x^2 - D^2 + \dfrac{D^2}{\gamma^2}\right) = 0 \end{cases} \qquad (4.4)$$

Corespunzător,

$$\begin{cases} \tilde{x} = \gamma^2\left(x \pm \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{\gamma^2}\left(x^2 - \beta^2 \cdot D^2\right)}\right) \\ \tilde{x} = \gamma^2\left(x \pm \dfrac{1}{\gamma}\sqrt{\beta^2 \cdot D^2 - \left(1-\gamma^2\right) \cdot x^2}\right) \end{cases} \qquad (4.5)$$

Deoarece

$$1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{-\beta^2}{1-\beta^2} = -\beta^2 \cdot \gamma^2 \qquad (4.6)$$

din ultima relație din (4.5) rezultă

$$\begin{cases} \tilde{x} = \gamma^2\left(x \pm \dfrac{\beta}{\gamma}\sqrt{D^2 + \gamma^2 \cdot x^2}\right) \\ \tilde{x} = \gamma\left(\gamma \cdot x \pm \beta\sqrt{D^2 + \gamma^2 \cdot x^2}\right) \end{cases} \qquad (4.7)$$

Deoarece segmentul se apropie de originea axei pe care se deplasează, selectarea firească a semnului în expresiile de mai sus, conduce la

$$\tilde{x} = \gamma\left(\gamma \cdot x - \beta \cdot \sqrt{D^2 + \gamma^2 \cdot x^2}\right) \qquad (4.8)^*$$

Segmentul a cărei imaginea apare în poziția $\tilde{x}$ se află în momentul formării imaginii în poziția x.
*(Relația de mai sus reprezintă răspunsul la întrebarea **IV.2**)*

4.7. Soluție la „Lungimea aparentă a barei”

Deoarece bara se deplasează cu viteza $\vec{v}$ lungimea sa este – datorită contracției Lorentz -. L/γ.
În momentul în care camera obscură formează imaginea barei având centrul în punctul x_0, capetele barei au respectiv pozițiile

$$x_{fața} = x_+ = x_0 + \frac{L}{2\gamma} \qquad (4.9)$$

şi

$$x_{spate} = x_- = x_0 - \frac{L}{2\gamma} \qquad (4.10)$$

Imaginile capetelor $\tilde{x}_\pm$ vor fi formate de camera obscură „ca şi cum” s-ar fi aflat în pozițiile

$$\tilde{x}_{\pm} = \gamma\left(\gamma \cdot x_0 \pm \frac{L}{2}\right) - \beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 \pm \frac{L}{2}\right)^2} \qquad (4.11)$$

În relația de mai sus s-aținut seama de expresiile pozițiilor capetelor barei şi de relația (4.8).
Lungimea aparentă a barei, $\tilde{L}$, este diferența pozițiilor aparente ale capetelor adică

$$\tilde{L}(x_0) = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_- \qquad (4.12)$$

*Răspunsul la întrebarea (**IV.3**) este deci*

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma \cdot L - \beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} + \beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 - \frac{L}{2}\right)^2} \qquad (4.13)^*$$

Văzută ca funcție de x_0 expresia polinomială de gradul 2

$$F_1 = \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2 \qquad (4.14)$$

are un minim cu valoarea D^2 pentru

$$x_0 = -\frac{L}{2\gamma} \qquad (4.15)$$

Pentru valori ale variabilei x_0, $x_0 \geq -\frac{L}{2\gamma}$ funcția F_1 este monoton crescătoare.
Corespunzător, expresia

$$E_1 = -\beta \cdot \gamma \sqrt{F_1} \qquad (4.16)$$

este monoton crescătoare până la $x_0 = -\frac{L}{2\gamma}$, apoi monoton descrescătoare şi are un maxim în valoare de

$$E_{1,\max} = E_1\left(x_0 = -\frac{L}{2\gamma}\right) = -\beta\,\gamma\,D \qquad (4.17)$$

Pentru

$$x_0 = \frac{L}{2\gamma} \qquad (4.18)$$

$$E_1\left(x_0 = \frac{L}{2\gamma}\right) = -\beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + L^2} \qquad (4.19)$$

Grafic, dependența $E_1(x_0)$ are aspectul prezentat în ***Figura IV.3***

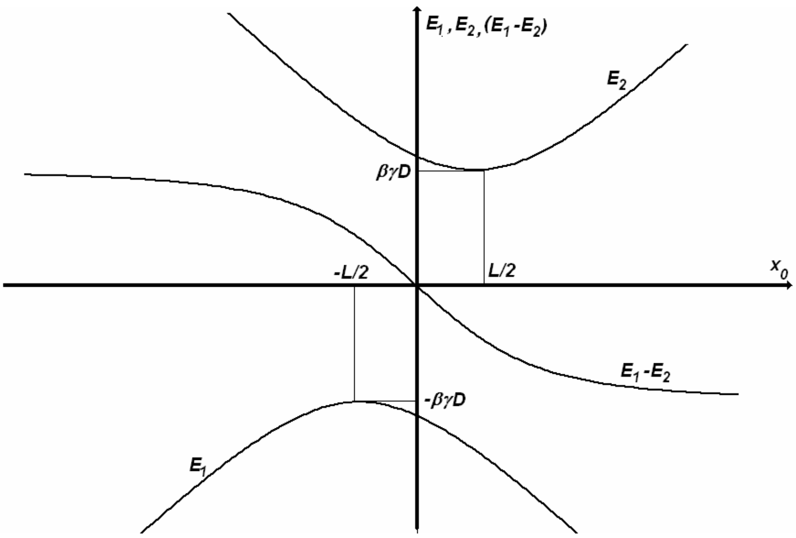

Figura IV. 3

Analog, văzută ca funcție de x_0 expresia polinomială de gradul 2

$$F_2 = \left(\gamma \cdot x_0 - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2 \qquad (4.20)$$

are un minim cu valoarea D^2 pentru

$$x_0 = \frac{L}{2\gamma} \qquad (4.21)$$

Pentru valori ale variabilei x_0, $x_0 \geq \frac{L}{2\gamma}$ funcția F_1 este monoton crescătoare.

Corespunzător, expresia

$$E_2 = \beta \cdot \gamma \sqrt{F_2} \qquad (4.22)$$

este monoton descrescătoare până la $x_0 = \frac{L}{2\gamma}$, apoi monoton crescătoare şi are un minim în valoare de

$$E_{2,\min im} = E_2\left(x_0 = \frac{L}{2\gamma}\right) = \beta\gamma D \qquad (4.23)$$

Pentru

$$x_0 = -\frac{L}{2\gamma} \qquad (4.24)$$

$$E_2\left(x_0 = -\frac{L}{2\gamma}\right) = \beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + L^2} \qquad (4.25)$$

Grafic, dependența $E_2(x_0)$ are aspectul prezentat în ***Figura IV.3***

Expresia

$$
\begin{cases}
E = E_1 + E_2 = \gamma\beta\left(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1}\right) \\
E = \gamma\beta \dfrac{F_2 - F_1}{\left(\sqrt{F_2} + \sqrt{F_1}\right)} = \dfrac{\left(\gamma \cdot x_0 - \dfrac{L}{2}\right)^2 + D^2 - \left(\left(\gamma \cdot x_0 + \dfrac{L}{2}\right)^2 + D^2\right)}{\sqrt{\left(\gamma \cdot x_0 - \dfrac{L}{2}\right)^2 + D^2} + \sqrt{\left(\gamma \cdot x_0 + \dfrac{L}{2}\right)^2 + D^2}} \\
E = \gamma\beta \dfrac{-2}{\sqrt{\left(\gamma \cdot x_0 - \dfrac{L}{2}\right)^2 + D^2} + \sqrt{\left(\gamma \cdot x_0 + \dfrac{L}{2}\right)^2 + D^2}} \gamma \cdot x_0 L
\end{cases}
\tag{4.26}
$$

este monoton descrescătoare – aşa cum se vede în imaginea din ***Figura IV.3***
Ultima relaţie din ansamblul de mai sus se poate scrie şi sub forma

$$
E = \frac{-2\gamma^2 \cdot \beta \cdot L}{\sqrt{\left(\gamma - \dfrac{L}{2x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{D}{x_0}\right)^2} + \sqrt{\left(\gamma + \dfrac{L}{2x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{D}{x_0}\right)^2}} \cdot \frac{x_0}{|x_0|} \tag{4.27}
$$

Pentru valori negative ale variabilei x_0, expresia de mai sus se scrie

$$
E_- = \frac{2\gamma^2 \cdot \beta \cdot L}{\sqrt{\left(\gamma - \dfrac{L}{2x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{D}{x_0}\right)^2} + \sqrt{\left(\gamma + \dfrac{L}{2x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{D}{x_0}\right)^2}} \tag{4.28}
$$

Evident, dacă x_0 evoluează monoton crescător între $-\infty$ şi 0, $-\infty < x_0 < 0$ expresia din (4.28) evoluează de asemenea monoton dar descrescător între

$$
E_-(-\infty) = \frac{\gamma^2 \cdot \beta \cdot L}{\sqrt{\gamma^2}} = \gamma \cdot \beta \cdot L \tag{4.29}
$$

şi

$$
E_-(0) = 0 \tag{4.30}
$$

Pentru valori pozitive ale variabilei x_0, expresia (4.27) se scrie

$$
E_+ = \frac{-2\gamma^2 \cdot \beta \cdot L}{\sqrt{\left(\gamma - \dfrac{L}{2x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{D}{x_0}\right)^2} + \sqrt{\left(\gamma + \dfrac{L}{2x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{D}{x_0}\right)^2}} \tag{4.31}
$$

Evident, dacă x_0 evoluează monoton crescător între 0 şi ∞ $0 < x_0 < \infty$ expresia din (4.31) evoluează de asemenea monoton dar descrescător între

$$
E_+(0) = 0 \tag{4.32}
$$

şi

$$
E_+(\infty) = -\gamma \cdot \beta \cdot L \tag{4.33}
$$

Studiul analitic al lungimii aparente

$$
\tilde{L}(x_0) = \gamma \cdot L + E \tag{4.34}
$$

arată – de asemenea – că aceasta evoluează monoton descrescător atunci când x_0 creşte.
Prin urmare, răspunsul corect la întrebarea ***IV.4***. este ***c.*** *Lungimea aparentă a barei descreşte tot timpul*

4.8. Soluție la „O imagine simetrică”.

Dacă în imaginea luată de camera obscură capetele barei se află la aceeaşi distanță de diafragma camerei obscure, înseamnă că lumina provenită de la ambele capete ale barei parcurge drumuri egale pentru a ajunge în intervale de timp egale la diafragma camerei obscure. Lumina care formează imaginea a plecat *simultan* din capetele barei. Lungimea aparentă a barei este în aceste condiții lungimea barei în mişcare – adică $\frac{L}{\gamma}$.

Răspunsul la întrebarea ***IV.5*** referitoare la lungimea aparentă a barei care apare în imaginea simetrică este deci

$$\tilde{L}_{simetric} = \frac{L}{\gamma} \qquad (4.35)^{*}$$

Imaginile capetelor sunt – conform enunțului – simetrice. Aceasta revine la

$$\tilde{x}_+ = -\tilde{x}_- \qquad (4.36)$$

adică

$$\tilde{x}_+ + \tilde{x}_- = 0$$

Ținând seama de (4.11) relația de mai sus devine

$$0 = \tilde{x}_+ + \tilde{x}_- = 2\gamma^2 \cdot x_0 - \beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} - \beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 - \frac{L}{2}\right)^2} \qquad (4.37)$$

Scriind şi lungimea aparentă a barei pentru situația analizată

$$\frac{L}{\gamma} = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_- = \tilde{L}(x_0) = \gamma \cdot L - \beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} + \beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 - \frac{L}{2}\right)^2} \qquad (4.38)$$

şi adunând relațiile de mai sus rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{L}{\gamma} = 2\gamma^2 \cdot x_0 + \gamma \cdot L - 2\beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \dfrac{L}{2}\right)^2} \\ \dfrac{2\gamma^2 \cdot x_0 + \gamma \cdot L - \dfrac{L}{\gamma}}{2\beta \cdot \gamma} = \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \dfrac{L}{2}\right)^2} \\ \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \dfrac{L}{2}\right)^2} = \dfrac{x_0 \cdot \gamma}{\beta} + \dfrac{L\left(\gamma^2 - 1\right)}{2\beta \cdot \gamma^2} = \dfrac{x_0 \cdot \gamma}{\beta} + \dfrac{L \cdot \beta}{2} \end{cases} \qquad (4.39)$$

Prin urmare

$$\sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} = \frac{x_0 \cdot \gamma}{\beta} + \frac{L \cdot \beta}{2} \qquad (4.40)$$

Scăzând (4.37) din (4.38) rezultă

$$\sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 - \frac{L}{2}\right)^2} = \frac{x_0 \cdot \gamma}{\beta} - \frac{L \cdot \beta}{2} \qquad (4.41)$$

Din oricare dintre ultimele două relații se poate extrage valoarea poziției mijlocului barei.
Din (4.40) rezultă succesiv

$$\begin{cases} D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \dfrac{L}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{x_0 \cdot \gamma}{\beta} + \dfrac{L \cdot \beta}{2}\right)^2 \\ D^2 + \gamma^2 \cdot x_0^2 + \dfrac{L^2}{4} + \gamma \cdot x_0 \cdot L = \dfrac{x_0^2 \cdot \gamma^2}{\beta^2} + \dfrac{L^2 \cdot \beta^2}{4} + \gamma \cdot x_0 \cdot L \\ \gamma^2 \cdot x_0^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\beta^2}\right) = \dfrac{L^2}{4}\left(\beta^2 - 1\right) - D^2 \\ \dfrac{1}{1-\beta^2} \cdot x_0^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\beta^2}\right) = \dfrac{L^2}{4}\left(\beta^2 - 1\right) - D^2 \end{cases} \tag{4.42}$$

şi deci

$$x_0 = \beta \sqrt{\frac{L^2}{4\gamma^2} + D^2} \qquad (4.43)^*$$

*Relația (4.43) reprezintă răspunsul la întrebarea **IV.6.***

O alternativă a metodei de determinare a poziției centrului barei, pleacă de la ipoteza „capetelor dispuse simetric”, (relația (4.37)), scrisă sub forma

$$2\gamma^2 \cdot x_0 - \beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} = \beta \cdot \gamma \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 - \frac{L}{2}\right)^2} \tag{4.44}$$

din care rezultă succesiv prin două ridicări la pătrat şi alte prelucrări algebrice

$$\begin{cases} 4\gamma^4 \cdot x_0^2 + 2\beta^2 \cdot \gamma^3 \cdot x_0 \cdot L = 4\beta \cdot \gamma^3 \cdot x_0 \cdot \sqrt{D^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \dfrac{L}{2}\right)^2} \\ 4\gamma^2 \cdot x_0^4\left(1 - \beta^2\right) + \beta^2 \cdot x_0^2 \cdot L^2\left(\beta^2 - 1\right) - 4\beta^2 \cdot x_0^2 \cdot D^2 = 0 \\ 4 \cdot x_0^4 - \dfrac{\beta^2 \cdot x_0^2 \cdot L^2}{\gamma^2} - 4\beta^2 \cdot x_0^2 \cdot D^2 = 0 \end{cases} \tag{4.45}$$

Din ultima relație se poate regăsi relația (4.43).

Poziția mijlocului barei în imagine poate fi determinată folosind relația dintre pozițiile aparentă şi actuală (4.8)

$$\begin{cases} \tilde{x}_0 = \gamma\left(\gamma \cdot x_0 - \beta \cdot \sqrt{D^2 + \gamma^2 \cdot x_0^2}\right) \\ \tilde{x}_0 = \gamma\left(\gamma \cdot \beta\sqrt{D^2 + \left(\dfrac{L}{2\gamma}\right)^2} - \beta \cdot \sqrt{D^2 + \gamma^2 \cdot \beta^2\left(D^2 + \left(\dfrac{L}{2\gamma}\right)^2\right)}\right) \end{cases} \tag{4.46}$$

Expresia poziției mijlocului barei *în imagine* este

$$\tilde{x}_0 = \gamma \cdot \beta\left(\sqrt{(\gamma \cdot D)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{(D \cdot \gamma)^2 + \left(\frac{L \cdot \beta}{2}\right)^2}\right) \tag{4.47}$$

Capătul din față al barei are imaginea la $\tilde{x}_+$. Distanța dintre imaginea capătului şi imaginea centrului este

$$\ell = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_0 = \frac{L}{2\gamma} - \tilde{x}_0 = \frac{L}{2\gamma} - \gamma \cdot \beta\left(\sqrt{(\gamma \cdot D)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{(D \cdot \gamma)^2 + \left(\frac{L \cdot \beta}{2}\right)^2}\right) \qquad (4.48)^*$$

*(Expresia de mai sus reprezintă răspunsul la întrebarea **IV.7**)*

4.9. Soluție pentru „Imagini foarte timpurii și foarte târzii”.

Relațiile (4.29) și (4.34) permit să se scrie pentru lungimea aparentă a barei în imaginea „foarte timpurie” expresia

$$\begin{cases} \tilde{L}_{timpurie} = \tilde{L}(x_0 \to -\infty) = \gamma \cdot L + E_{-} = \gamma \cdot L + \gamma \cdot \beta \cdot L \\ \tilde{L}_{timpurie} = \gamma \cdot L \cdot (1+\beta) = L \dfrac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \tilde{L}_{timpurie} = L\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} \end{cases} \tag{4.49}$$

Analog, relațiile (4.33) și (4.34) permit să se scrie pentru lungimea aparentă a barei în imaginea „foarte târzie” expresia

$$\begin{cases} \tilde{L}_{târzie} = \tilde{L}(x_0 \to \infty) = \gamma \cdot L + E_{+} = \gamma \cdot L - \gamma \cdot \beta \cdot L \\ \tilde{L}_{târzie} = \gamma \cdot L \cdot (1-\beta) = L \dfrac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \tilde{L}_{târzie} = L\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} \end{cases} \tag{4.50}$$

Deoarece – evident –

$$\tilde{L}_{timpurie} = L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \tilde{L}_{târzie} = L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{4.51}$$

Se poate deci afirma că răspunsul corect la întrebarea ***IV.8*** este ***b.*** *Lungimea aparentă este de $3{,}00\,m$ pe imaginea timpurie și de $1{,}00\,m$ pe imaginea târzie*.

Raportul lungimilor imaginilor timpurie și târzie este

$$\frac{\tilde{L}_{timpurie}}{\tilde{L}_{târzie}} = \frac{L\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}}{L\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}} = \frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{3}{1}. \tag{4.52}$$

Din această relație rezultă

$$\begin{cases} 1+\beta = 3-3\beta \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{4.53}$$

În consecință

$$v = \frac{c}{2} \tag{4.54}$$

*(Relația (4.54) reprezintă răspunsul la întrebarea **IV.9)***

Din expresia lungimii imaginii timpurii rezultă – ținând seama de viteza barei

$$3m = \tilde{L}_{timpurie} = L\sqrt{\frac{1+1/2}{1-1/2}} = L\sqrt{3} \tag{4.55}$$

Prin urmare

$$L = \sqrt{3}\,m \cong 1{,}73\,m \tag{4.56}$$

*(Valoarea de mai sus reprezintă răspunsul la întrebarea **IV.10**)*

Deoarece valoarea parametrului γ corespunzătoare valorii $\beta = \frac{1}{2}$ este

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad (4.57)$$

lungimea aparentă a imaginii simetrice este – conform relației

$$\begin{cases} \widetilde{L} = \dfrac{L}{\gamma} = L\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \widetilde{L} = \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} m = \dfrac{3}{2} m = 1{,}50\, m \end{cases} \qquad (4.58)$$

*(Valoarea lungimii aparente a imaginii simetrice din relația (4.58) este răspunsul la întrebarea **IV.11**)*

Soluție propusă de:

Prof. drd. Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației Cercetării și Tineretului
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI – Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti