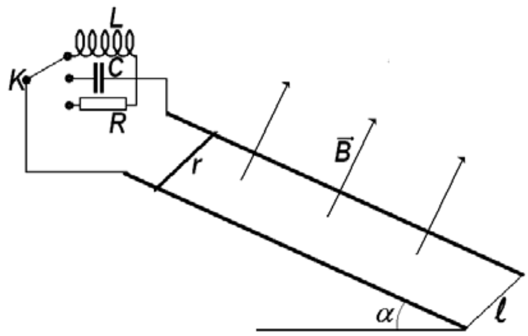
Problema III – Să fie oscilație ? …și unde (10 puncte)

A. Să fie oscilație ? (7 puncte)



Pe două șine paralele aflate la distanța ℓ una de alta (vezi figura alăturată), situate într-un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, se mișcă o bară metalică având masa m și lungimea ℓ. Consideră că șinele și bara au rezistență electrică neglijabilă, că deplasarea barei pe șine se face fără frecare și că un câmp magnetic uniform, omogen cu inducția $\vec{B}$ este perpendicular pe planul șinelor. Prin intermediul unui întrerupător K circuitul electric bară – șine poate fi deschis sau poate fi închis printr-un rezistor, sau printr-un condensator sau printr-o bobină.
Pentru fiecare dintre următoarele cazuri:

- **a.** circuitul este deschis;
- **b.** circuitul șine – bară este închis printr-un rezistor cu rezistența R;
- **c.** circuitul șine – bară este închis printr-un condensator cu capacitatea C;
- **d.** circuitul șine – bară este închis printr-o bobină cu inductanța L și rezistența neglijabilă.

1. Stabilește dacă în cursul mișcării se atinge o viteză limită.
2. Găsește expresia vitezei limită, dacă aceasta există.
3. Dedu legea de mișcare a barei.
4. Stabilește expresia cantității nete de sarcină electrică ce trece prin bară de la începutul mișcării barei, până la un moment dat t.

Soluție

a. Dacă circuitul este deschis, bara se deplasează datorită gravitației. Mișcarea sa este uniform accelerată cu accelerația

$$a = g\sin\alpha \qquad (3.1)$$

În cursul mișcării NU se atinge o viteză limită. Legea de mișcare a barei, într-un sistem care are axa Ox de-a lungul șinelor și originea în poziția inițială a barei, este

$$x(t) = g\sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2} \qquad (3.2)$$

Fenomenul de inducție electromagnetică conduce la apariția unei diferențe de potențial între capetele barei dar, circuitul electric fiind deschis, prin șine nu trece curent electric. În bară, Forța Lorentz duce către capetele barei sarcini de semne diferite din ce în ce mai multe – pe măsura creșterii tensiunii electromotoare . Sarcina netă care trece prin bară este însă, evident, nulă.

b Dacă la un moment dat bara are viteza $\vec{v}$ și accelerația $\vec{a}$ atunci deplasarea sa în câmp magnetic conduce la apariția între capetele barei a diferenței de potențial

$$V = B\cdot\ell\cdot v \qquad (3.3)$$

iar prin bară trece curentul

$$I = \frac{V}{R} = \frac{B\cdot\ell\cdot v}{R} \qquad (3.4)$$

Existența curentului prin bară determină apariția unei forțe de natură electrică acționând în planul şinelor şi, pentru deplasarea barei se poate scrie legea de mişcare

$$ma = mg\sin\alpha - BI\ell \qquad (3.5)$$

sau, ținând seama de relația (3.4)

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{B^2\ell^2 v}{R} \qquad (3.6)$$

Evident, creşterea vitezei barei determină creşterea forței electromagnetice de frânare şi bara evoluează către o viteză limită la care accelerația sa este nulă.

$$\begin{cases} 0 = mg\sin\alpha - \dfrac{B^2\ell^2 v_{lim}}{R} \\ v_{lim} = \dfrac{Rmg\sin\alpha}{B^2\ell^2} \end{cases} \qquad (3.7)$$

Relația (3.6) se rescrie

$$\begin{cases} a = g\cdot\sin\alpha\cdot\left(1 - \dfrac{v}{v_{lim}}\right) \\ \dfrac{dv}{dt} = g\cdot\sin\alpha\cdot\left(1 - \dfrac{v}{v_{lim}}\right) \end{cases} \qquad (3.8)$$

sau

$$\frac{dv}{\dfrac{v}{v_{lim}} - 1} = -g\cdot\sin\alpha\cdot dt \qquad (3.9)$$

Integrată între momentele 0 şi t
Ecuația diferențială de mai sus conduce la

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^v \frac{dv}{\dfrac{v}{v_{lim}} - 1} = -g\cdot\sin\alpha\cdot\int_0^t dt \\ v_{lim}\cdot\ln\left|\dfrac{v}{v_{lim}} - 1\right| = -g\cdot t\cdot\sin\alpha \end{cases} \qquad (3.10)$$

sau

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{v}{v_{lim}} = e^{-\frac{g\cdot t\cdot\sin\alpha}{v_{lim}}} \\ v(t) = v_{lim}\cdot\left(1 - e^{-\frac{g\cdot t\cdot\sin\alpha}{v_{lim}}}\right) \end{cases} \qquad (3.11)$$

Intensitatea curentului care trece prin bară depinde de timp conform legii

$$I = \frac{V}{R} = \frac{B\cdot\ell\cdot v_{lim}}{R}\cdot\left(1 - e^{-\frac{g\cdot t\cdot\sin\alpha}{v_{lim}}}\right) \qquad (3.12)$$

Integrarea după timp între momentele 0 şi t a expresiei vitezei scrisă ca

$$\frac{dx}{dt}=v_{lim}\cdot\left(1-e^{-\frac{g\cdot t\cdot \sin\alpha}{v_{lim}}}\right) \tag{3.13}$$

în ipoteza că

$$x(0)=0 \tag{3.14}$$

duce la

$$x(t)=v_{lim}\cdot\left(t+\frac{mR}{B^2\ell^2}e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right) \tag{3.15}$$

La momente foarte îndepărtate de momentul pornirii, când $B^2\ell^2t/(mR)>>1$ deplasarea barei este rectilinie uniformă cu viteza constantă v_{lim} .

$$v_{lim}=\frac{Rmg\sin\alpha}{B^2\ell^2} \tag{3.16}$$

Din relația (3.2) scrisă ca

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{B\cdot\ell}{R}\frac{dx}{dt} \tag{3.17}$$

rezultă că sarcina scursă prin bară până la momentul t are expresia

$$Q=\frac{V}{R}=\frac{B\cdot\ell}{R}x \tag{3.18}$$

Sarcina scursă prin bară depinde - în cazul analizat – liniar de distanța parcursă de bară.

$$Q=\frac{B\cdot\ell\cdot v_{lim}}{R}\cdot\left(t+\frac{mR}{B^2\ell^2}e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right) \tag{3.19}$$

c. Dacă circuitul bară – şine este închis prin condensator, tensiunea indusă între capetele barei $V=B\cdot\ell\cdot v$ se aplică la bornele condensatorului determinând încărcarea acestuia cu sarcina Q

$$Q=CV=CB\ell v \tag{3.20}$$

Curentul care trece prin circuit are expresia

$$I=\frac{dQ}{dt}=CB\ell\frac{dv}{dt}=CB\ell a \tag{3.21}$$

şi este deci proporțional cu accelerația barei
Principiul doi al dinamicii scris pentru bara în deplasare are expresia

$$\begin{cases} ma=mg\sin\alpha-BI\ell \\ ma=mg\sin\alpha-B^2\ell^2Ca \end{cases} \tag{3.22}$$

şi permite determinarea expresiei accelerației barei

$$a=\frac{mg\sin\alpha}{m+B^2\ell^2C} \tag{3.23}$$

În cazul în care circuitul şine – bară este închis prin condensator mişcarea barei este rectilinie uniform accelerată . Nu există deci o viteză limită. În cursul mişcării legătura dintre poziție şi timp este dată de

$$x(t)=\frac{mg\sin\alpha}{m+B^2\ell^2C}\cdot\frac{t^2}{2} \tag{3.24}$$

Curentul care trece prin bară are o intensitate constantă cu expresia

$$I = CB\ell \frac{mg\sin\alpha}{m + B^2\ell^2 C} \qquad (3.25)$$

Prin integrarea relației (3.25) între momentul inițial şi momentul t se găseşte expresia sarcinii care curge prin bară până în momentul t ca fiind

$$Q = CB\ell \frac{mg\sin\alpha}{m + B^2\ell^2 C} \cdot t \qquad (3.26)$$

d. Dacă circuitul este închis printr-o bobină cu inductanța L şi cu rezistența neglijabilă, tensiunea electromotoare indusă în bară este egală cu tensiunea contra - electromotoare autoindusă în bobină şi deci

$$L\frac{dI}{dt} = B\ell v = B\ell \frac{dx}{dt} \qquad (3.27)$$

Prin integrarea relației de mai sus între momentul inițial şi un moment t ulterior, (considerând că la momentul inițial poziția şi intensitatea curentului sun nule), rezultă că

$$LI = B\ell x$$
$$I = \frac{B\ell}{L} x \qquad (3.28)$$

Prin urmare, ecuația principiului doi al dinamicii pentru situația considerată se scrie

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - BI\ell \\ ma = mg\sin\alpha - \dfrac{B^2\ell^2}{L} x \end{cases} \qquad (3.29)$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{B\ell}{\sqrt{L \cdot m}}\right)^2 x = g\sin\alpha \qquad (3.30)$$

Ecuația descrie o oscilație armonică având pulsația

$$\omega = \frac{B\ell}{\sqrt{L \cdot m}} \qquad (3.31)$$

descrisă de expresiile

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi) + \dfrac{Lmg\sin\alpha}{B^2\ell^2} \\ v(t) = A\omega\cos(\omega \cdot t + \varphi) \end{cases} \qquad (3.32$$

deoarece la momentul inițial poziția şi viteza sunt nule

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \qquad (3.33)$$

Scriind relațiile (3.32) pentru momentul inițial rezultă că

$$\begin{cases} 0 = A\sin(\varphi) + \dfrac{Lmg\sin\alpha}{B^2\ell^2} \\ 0 = A\omega\cos(\varphi) \end{cases} \qquad (3.34)$$

Din cea de-a doua relație rezultă

$$\begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \varphi = \pi/2 \end{cases} \qquad (3.35)$$

şi, în consecinţă, din prima relaţie din (3.34) rezultă

$$A = -\frac{Lmg\sin\alpha}{B^2\ell^2} \tag{3.36}$$

Legea de mişcare pentru bară este

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{Lmg\sin\alpha}{B^2\ell^2}\left(1 - \sin\left(\omega\cdot t + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{Lmg\sin\alpha}{B^2\ell^2}\left(1 - \cos\left(\dfrac{B\ell}{\sqrt{L\cdot m}}\cdot t\right)\right) \\ v(t) = \dfrac{\sqrt{Lm}}{B\ell} g\sin\alpha\cdot\sin\left(\dfrac{B\ell}{\sqrt{L\cdot m}}\cdot t\right) \end{cases} \tag{3.37}$$

Mişcarea barei este o mişcare periodică cu perioada

$$T = 2\pi/\omega \tag{3.38}$$

desfăşurată în jurul poziţiei de echilibru

$$x_0 = \frac{Lmg\sin\alpha}{B^2\ell^2} \tag{3.39}$$

Intensitatea curentului are expresia

$$LI = B\ell x$$

$$I = \frac{B\ell}{L}x \tag{3.40}$$

$$I = \frac{mg\sin\alpha}{B\ell}\left(1 - \cos\left(\frac{B\ell}{\sqrt{L\cdot m}}\cdot t\right)\right)$$

iar sarcina care trece prin bară va avea expresia

$$\begin{cases} Q = \dfrac{mg\sin\alpha}{B\ell}\displaystyle\int_0^t\left(1 - \cos\left(\dfrac{B\ell}{\sqrt{L\cdot m}}\cdot t\right)\right)dt \\ Q = \dfrac{mg\sin\alpha}{B\ell}\left[t + \dfrac{\sqrt{L\cdot m}}{B\ell}\sin\left(\dfrac{B\ell}{\sqrt{L\cdot m}}\cdot t\right)\right] \end{cases} \tag{3.41}$$

pentru un moment din prima semiperioadă şi respectiv

$$\begin{cases} Q = \dfrac{mg\sin\alpha}{B\ell}\left[\displaystyle\int_0^{\pi/\omega}(1 - \cos(\omega t))dt + \int_{\pi/\omega}^{t}(-1 + \cos(\omega t))dt\right] \\ Q = \dfrac{mg\sin\alpha}{B\ell}\left[\dfrac{2\pi}{\omega} - t - \dfrac{\sqrt{L\cdot m}}{B\ell}\sin(\omega\cdot t)\right] \end{cases} \tag{3.42}$$

pentru cea de-a doua semiperioadă.
Evoluţia sarcinii nete care trece prin bară este de asemenea periodică.

B. ….şi unde (2 puncte)

Un post de radio are două antene situate la marginea unui oraş. Proprietarii postului ar dori ca o parte cât mai mare din energia emisă de antene să meargă spre oraş şi o cât mai mică parte de energie să meargă în partea opusă oraşului. Antenele sunt stâlpi verticali aflaţi la distanţa L unul de celălalt, pe direcţia spre oraş şi emit unde cu lungimea de undă λ.

Tehnic, se poate realiza un defazaj Δt între emisiile celor două antene. Ecuația undei emisă de o antenă este $u(x,t) = a\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$

a. Determină expresia celei mai mici distanțe L dintre antene, pentru care se poate crea interferență constructivă perfectă în direcția spre oraş şi interferență distructivă perfectă pe direcția opusă. Exprimă rezultatul în funcție de lungimea de undă λ .

b. Determină în funcție de perioada T , expresia „întârzierii" Δt care asigură defazajul necesar funcționării celor două antene în condițiile precizate mai sus.

c. Pentru un post de radio care operează pe frecvența $f = 1MHz$, calculează valorile lui L şi Δt , în condițiile precizate la punctul **a**, respectiv la punctul **b**.

Soluție

Într-un sistem de referință cu originea într-una dintre antene şi cu sensul pozitiv spre oraşul aflat la dreapta antenei, pentru undele propagate de la antenă se poate scrie

$$\begin{cases} u_{dreapta}^{(1)} = a\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \\ u_{s\tan ga}^{(1)} = a\sin\left[2\pi\left(-\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \end{cases} \tag{3.43}$$

Dacă cea de-a doua antenă este plasată pe axa $0x$ în poziția $x = L$, pentru undele „întârziate"propagate de la ea se poate scrie că

$$\begin{cases} u_{dreapta}^{(2)} = a\sin\left[2\pi\left(\frac{x-L}{\lambda} - \frac{t-\Delta t}{T}\right)\right] \\ u_{s\tan ga}^{(2)} = a\sin\left[2\pi\left(-\frac{x-L}{\lambda} - \frac{t-\Delta t}{T}\right)\right] \end{cases} \tag{3.44}$$

Din suprapunerea emisiilor rezultă

$$\begin{cases} \frac{u_{dreapta}^{compus}}{a} = \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] + \sin\left[2\pi\left(\frac{x-L}{\lambda} - \frac{t-\Delta t}{T}\right)\right] \\ \frac{u_{s\tan ga}^{(compus)}}{a} = \sin\left[2\pi\left(-\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] + \sin\left[2\pi\left(-\frac{x-L}{\lambda} - \frac{t-\Delta t}{T}\right)\right] \end{cases} \tag{3.45}$$

sau

$$\begin{cases} \frac{u_{dreapta}^{compus}}{a} = \sin\left[\pi\left(\frac{2x}{\lambda} - \frac{2t}{T} - \frac{L}{\lambda} + \frac{\Delta t}{T}\right)\right]\cos\left[\pi\left(\frac{L}{\lambda} - \frac{\Delta t}{T}\right)\right] \\ \frac{u_{s\tan ga}^{(compus)}}{a} = \sin\left[\pi\left(-\frac{2x}{\lambda} - \frac{2t}{T} + \frac{L}{\lambda} + \frac{\Delta t}{T}\right)\right]\cos\left[\pi\left(-\frac{L}{\lambda} - \frac{\Delta t}{T}\right)\right] \end{cases} \tag{3.46}$$

Condițiile de interferență constructivă „la dreapta" respectiv distructivă „la stânga" conduc la

$$\begin{cases} \frac{L}{\lambda} - \frac{\Delta t}{T} = 0 \\ \frac{L}{\lambda} + \frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.47}$$

cu soluțiile

$$L = \frac{\lambda}{4} \qquad (3.48)$$

$$\Delta t = \frac{T}{4} \qquad (3.49)$$

Deoarece $f = 10^6 Hz$, perioada undelor va fi $T = 10^{-6} s$ iar lungimea de undă $\lambda = 300m$
În concluzie

$$L = 75m \qquad (3.50)$$

$$\Delta t = 0,25\ \mu s \qquad (3.51)$$

Soluție propusă de:

Prof. drd. Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației Cercetării şi Tineretului
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI – Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti