Olimpiada Națională de Fizică
Piatra Neamț, 4-8 februarie 2008

Ministerul Educației, Cercetării şi Tineretului
Olimpiada Națională de Fizică, 2008
Problema 1
MECANICĂ

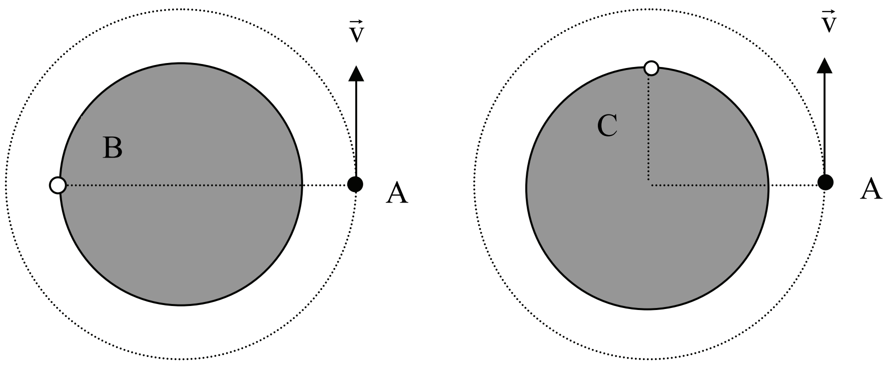
BARAJ

Aselenizarea unei nave cosmice !

O navă cosmică cu masa $M = 12$ t evoluează în jurul Lunii pe o orbită circulară, la înălțimea h = 100 km. În vederea trecerii pe orbita de aselenizare, se cuplează, pentru un timp foarte scurt, un motor de transfer cu reacție. Viteza de zbor a gazelor din ajutajul motorului cu reacție este $u = 10^4\,\mathrm{m/s}$. Raza Lunii este R_L = 1700 km, iar accelerația căderii libere pe suprafața Lunii este $g_{0L} = 1{,}7\ \mathrm{m/s^2}$.

a) *Să se determine* cantitatea de combustibil care trebuie să se consume pentru transferul navei de pe orbita inițială, pe orbita de aselenizare, dacă pe traiectoria de coborâre nava evoluează liber din punctul A (unde se cuplează motorul de transfer pentru un timp foarte mic) şi trece prin punctul B, tangent la suprafața Lunii, aşa cum indică desenul a din figura alăturată.

b) Într-o a doua variantă de aselenizare, pe traiectoria de coborâre, nava trebuie să evolueze liber din punctul A (unde se cuplează motorul de transfer pentru un timp foarte mic) şi să treacă tangent la suprafața Lunii prin punctul C, aşa cum indică desenul b. *Să se determine* cantitatea de combustibil care se consumă în acest caz?



a b

Explozie într-un aparat cosmic !

Un aparat cosmic constă dintr-o sferă cu raza R = 2 m, având pereții rigizi şi foarte subțiri. Sfera este plină cu un gaz şi conține, de asemenea, o altă sferă cu raza $r = R/2$, plină cu acelaşi gaz, dar la o presiune mai mare decât în sfera exterioară. Sfera interioară este tangentă la suprafața interioară a aparatului. Ca rezultat al unui accident, sfera interioară explodează.

c) *Să se determine* raportul presiunilor finală şi inițială ale gazului din sfera exterioară, $\frac{p}{p_1}$, dacă explozia deplasează aparatul pe distanța d = 0,5 m. Masa sferei interioare este neglijabilă, iar temperatura din interiorul aparatului se consideră constantă.

Prof. dr. Mihail Sandu
Universitatea "Lucian Blaga" – Sibiu: G.Ş.E.A.S. Călimăneşti

Aselenizarea unei nave cosmice

a) Activarea motorului cu reacție al navei în punctul A al orbitei circulare, cu scopul aselenizării navei în punctul B, presupune reducerea vitezei navei în aşa fel încât să se asigure intrarea pe orbita eliptică reprezentată în figura 1, a cărei semiaxă mare are lungimea $(2R_L + h)$, de-a lungul căreia evoluția se face cu respectarea legilor lui Kepler, astfel încât avem:

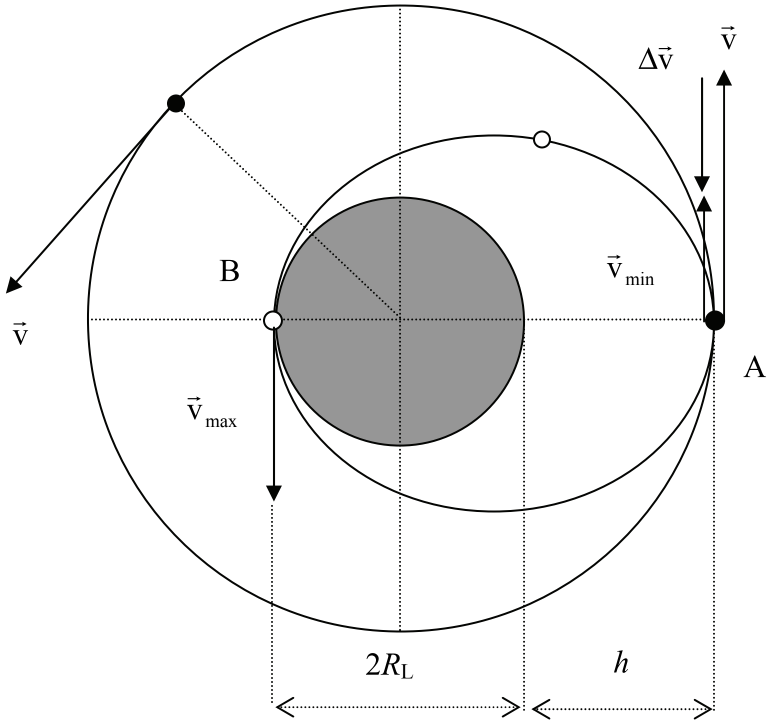


Fig. 1

$$\frac{m\text{v}_{min}^2}{2} - K\frac{mM_L}{r_{max}} = \frac{m\text{v}_{max}^2}{2} - K\frac{mM_L}{r_{min}};$$

$$g_{0L} = K\frac{M_L}{R_L^2};$$

$$\text{v}_{min}^2 - 2\frac{g_{0L}R_L^2}{r_{max}} = \text{v}_{max}^2 - 2\frac{g_{0L}R_L^2}{r_{min}};$$

$$\text{v}_{min}r_{max} = \text{v}_{max}r_{min};$$

$$r_{max} = R;\ r_{min} = R_L;\ \text{v}_{min}R = \text{v}_{max}R_L;$$

$$\text{v}_{max} = \frac{R}{R_L}\text{v}_{min};\ \text{v}_{min}^2 = 2\frac{g_{0L}R_L^3}{R(R+R_L)};$$

$$\text{v}_{min} = R_L\sqrt{\frac{2g_{0L}R_L}{R(R+R_L)}};\ \text{v}_{max} = R\sqrt{\frac{2g_{0L}R_L}{R(R+R_L)}};$$

$$R = R_L + h;$$

$$\mathrm{v}_{\min} = R_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{2g_{0\mathrm{L}}R_{\mathrm{L}}}{(R_{\mathrm{L}}+h)(2R_{\mathrm{L}}+h)}}\,;\ \mathrm{v}_{\max} = (R_{\mathrm{L}}+h)\sqrt{\frac{2g_{0\mathrm{L}}R_{\mathrm{L}}}{(R_{\mathrm{L}}+h)(2R_{\mathrm{L}}+h)}}\,;$$

$$\Delta\mathrm{v} = \mathrm{v} - \mathrm{v}_{\min} = R_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+h}} - \mathrm{v}_{\min}\,;$$

$$\Delta\mathrm{v} = R_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+h}}\left(1-\sqrt{\frac{2R_{\mathrm{L}}}{2R_{\mathrm{L}}+h}}\right);\ \Delta\mathrm{v} = R_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+h}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{2R_{\mathrm{L}}}}}\right);$$

$$h \ll 2R_{\mathrm{L}}\,;$$

$$\Delta\mathrm{v} = R_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+h}}\left[1-\left(1-\frac{h}{4R_{\mathrm{L}}}\right)\right];$$

$$\Delta\mathrm{v} = \frac{h}{4}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+h}} \approx 24{,}3\ \mathrm{m/s}.$$

Să presupunem că produsele arderii, având masa totală m, sunt aruncate din ajutajul rachetei în forma unei singure porții, cu viteza relativă u. Scriind legea conservării impulsului, într-un sistem de referință solidar cu nava, care se deplasează cu viteza v, rezultă:

$$(M-m)\Delta\mathrm{v} = mu;\ m = M\,\frac{\Delta\mathrm{v}}{u+\Delta\mathrm{v}}\,;$$

unde M este masa inițială a navei;

$$\Delta\mathrm{v} \ll u;\ \ m \approx M\,\frac{\Delta\mathrm{v}}{u} \approx 29\ \mathrm{kg}.$$

b) Activarea motorului cu reacție al navei în punctul A al orbitei circulare, cu scopul aselenizării navei în punctul C, presupune modificarea vectorului viteză al navei în așa fel încât să se asigure intrarea pe orbita hiperbolică reprezentată în figura 2, al cărei vârf este tangent la suprafața Lunii în punctul C și în al cărei focar se află centrul Lunii.

Evoluția navei de-a lungul hiperbolei se face în așa fel încât energia mecanică totală a sistemului navă – Lună este $E > 0$. În acord cu legile de conservare ale energiei mecanice totale și a momentului cinetic, rezultă:

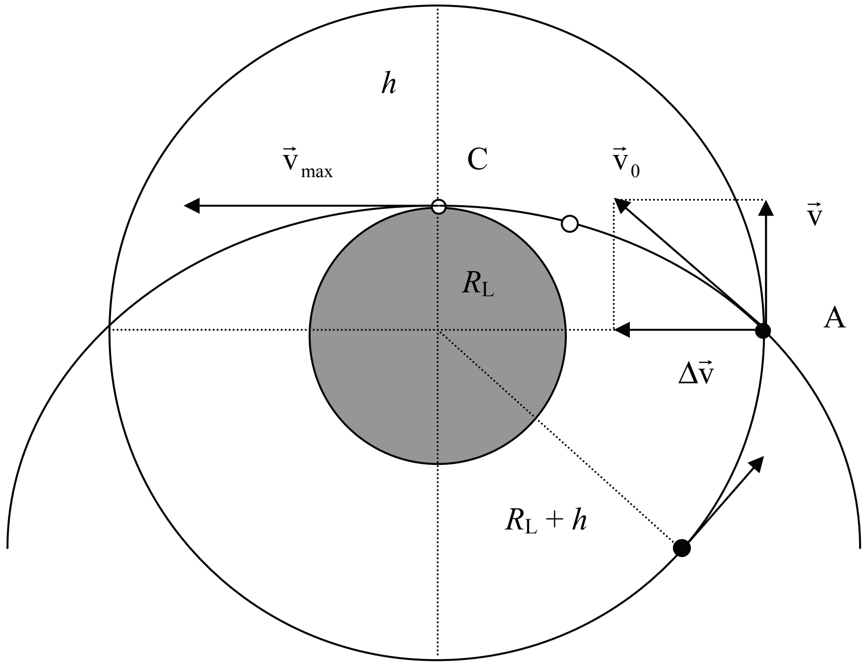


Fig. 2

$$\frac{m\mathrm{v}_0^2}{2} - K\frac{mM}{R_\mathrm{L}+h} = \frac{m\mathrm{v}_{\max}^2}{2} - K\frac{mM}{R_\mathrm{L}};$$

$$\mathrm{v}^2 + (\Delta\mathrm{v})^2 - 2\frac{KM}{R_\mathrm{L}+h} = \mathrm{v}_{\max}^2 - 2\frac{KM}{R_\mathrm{L}};$$

$$\mathrm{v}^2 + (\Delta\mathrm{v})^2 - 2\frac{g_{0\mathrm{L}}R_\mathrm{L}^2}{R_\mathrm{L}+h} = \mathrm{v}_{\max}^2 - 2g_{0\mathrm{L}}R_\mathrm{L};$$

$$\mathrm{v} = R_\mathrm{L}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_\mathrm{L}+h}};\ (\Delta\mathrm{v})^2 = \mathrm{v}_{\max}^2 - 2g_{0\mathrm{L}}R_\mathrm{L} + 2\frac{g_{0\mathrm{L}}R_\mathrm{L}^2}{R_\mathrm{L}+h} - \frac{g_{0\mathrm{L}}R_\mathrm{L}^2}{R_\mathrm{L}+h};$$

$$(\Delta\mathrm{v})^2 = \mathrm{v}_{\max}^2 - 2g_{0\mathrm{L}}R_\mathrm{L} + \frac{g_{0\mathrm{L}}R_\mathrm{L}^2}{R_\mathrm{L}+h};$$

$$(\Delta\mathrm{v})^2 = \mathrm{v}_{\max}^2 - g_{0\mathrm{L}}R_\mathrm{L}\frac{R_\mathrm{L}+2h}{R_\mathrm{L}+h};$$

$$\mathrm{v}(R_\mathrm{L}+h) = \mathrm{v}_{\max}R_\mathrm{L};\ \mathrm{v}_{\max} = \mathrm{v}\frac{R_\mathrm{L}+h}{R_\mathrm{L}} = (R_\mathrm{L}+h)\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_\mathrm{L}+h}};$$

$$\Delta\mathrm{v} = \sqrt{\frac{h^2 g_{0\mathrm{L}}}{R_\mathrm{L}+h}} \approx 97\ \mathrm{m/s},$$

astfel încât masa de combustibil consumat pentru executarea manevrei de aselenizare în acest caz este:

$$m \approx M\frac{\Delta\mathrm{v}}{u} = 116\ \mathrm{kg}.$$

Explozie într-un aparat cosmic

c) La momentul inițial, centrul de masă, CM, al sistemului se determină ca centru de masă al unui sistem format dintr-o sferă cu densitatea ρ_1 şi o sferă cu densitatea $(\rho_2-\rho_1)$, unde ρ_1 este densitatea gazului care umple sfera cu raza *R* şi ρ_2 este densitatea gazului care umple sfera cu raza R/2.

După explozie, centrul de masă al aparatului este centrul de masă al sferei cu raza *R*, plină cu amestecul gazos rezultat, având densitatea ρ.

Explozia din aparat nu modifică poziția centrului de masă al sistemului. Deoarece după explozie, întregul aparat se deplasează pe distanța *a*, însemnează că centrul de masă al aparatului se flă la distanța *a* față de poziția inițială a centrului sferei mari, aşa cum indică figura 3.

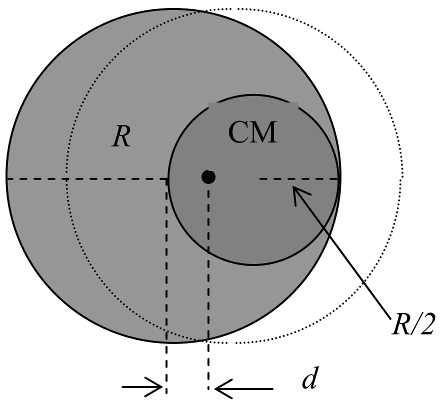


Fig. 3

Rezultă:

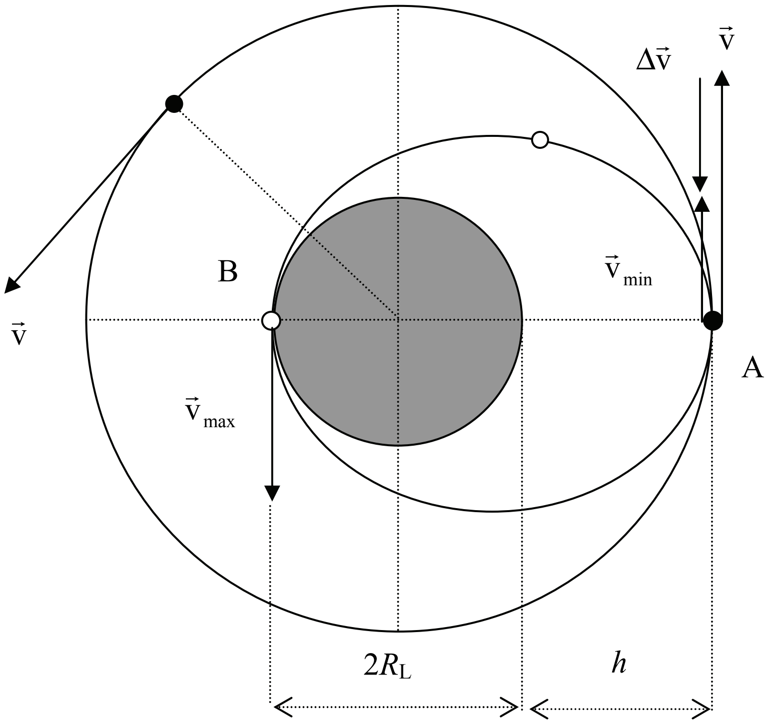
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{R+14d}{R-2d}; \;\; \rho = \frac{7}{8}\rho_1 + \frac{1}{8}\rho_2;$$

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{R}{R-2d} = 2.$$

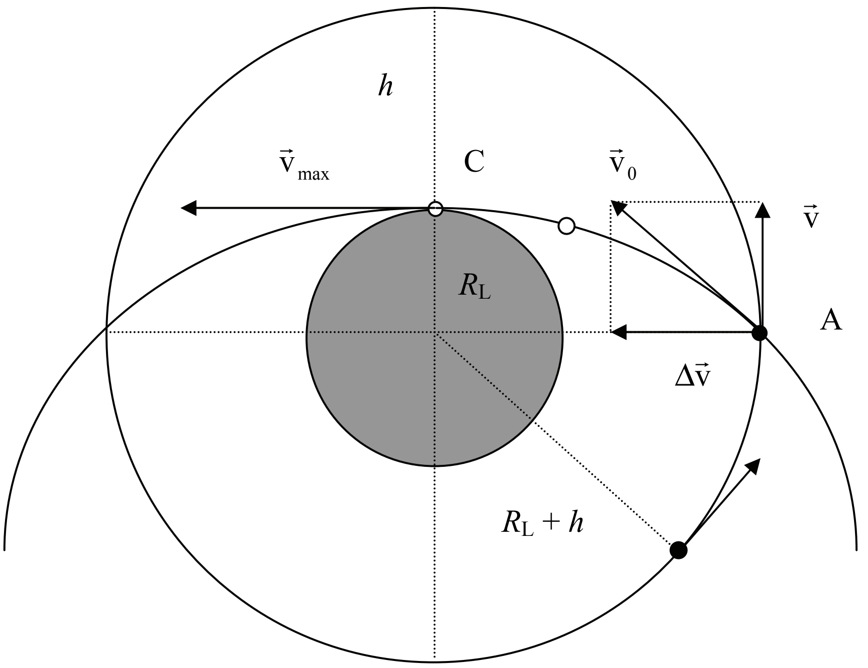
Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

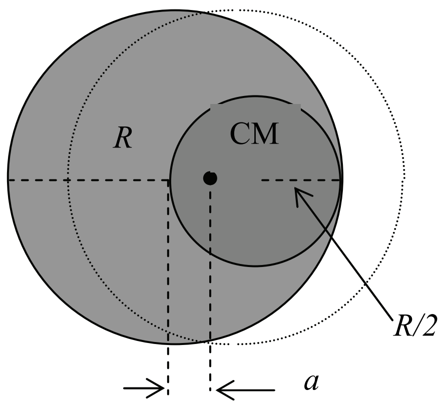
Olimpiada Națională de Fizică, 2008
Problema 1
MECANICĂ – Barem de notare

BARAJ

Subiect	**Parțial**	**Punctaj**
Barem – Proba de Baraj – Problema de mecanică		**10**
a) Activarea motorului cu reacție al navei în punctul A al orbitei circulare, cu scopul aselenizării navei în punctul B, presupune reducerea vitezei navei în așa fel încât să se asigure intrarea pe orbita eliptică reprezentată în figura 1, a cărei semiaxă mare are lungimea $(2R_L + h)$, de-a lungul căreia evoluția se face cu respectarea legilor lui Kepler, astfel încât avem:	0,10	**3,00**
 **Fig. 1**	0,20	
$\frac{m v_{min}^2}{2} - K\frac{mM_L}{r_{max}} = \frac{m v_{max}^2}{2} - K\frac{mM_L}{r_{min}};$	0,20	
$g_{0L} = K\frac{M_L}{R_L^2};$	0,10	
$v_{min}^2 - 2\frac{g_{0L}R_L^2}{r_{max}} = v_{max}^2 - 2\frac{g_{0L}R_L^2}{r_{min}};$	0,10	
$v_{min} r_{max} = v_{max} r_{min};$	0,20	
$r_{max} = R;\ r_{min} = R_L;\ v_{min} R = v_{max} R_L;$	0,10	
$v_{max} = \frac{R}{R_L} v_{min};\ v_{min}^2 = 2\frac{g_{0L}R_L^3}{R(R+R_L)};$	0,10	
$v_{min} = R_L\sqrt{\frac{2g_{0L}R_L}{R(R+R_L)}};$	0,10	

$$\mathrm{v}_{\max} = R\sqrt{\frac{2g_{0\mathrm{L}}R_{\mathrm{L}}}{R(R+R_{\mathrm{L}})}};$$ $$R = R_{\mathrm{L}} + h;$$ $$\mathrm{v}_{\min} = R_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{2g_{0\mathrm{L}}R_{\mathrm{L}}}{(R_{\mathrm{L}}+h)(2R_{\mathrm{L}}+h)}};$$ $$\mathrm{v}_{\max} = (R_{\mathrm{L}}+h)\sqrt{\frac{2g_{0\mathrm{L}}R_{\mathrm{L}}}{(R_{\mathrm{L}}+h)(2R_{\mathrm{L}}+h)}};$$ $$\Delta\mathrm{v} = \mathrm{v} - \mathrm{v}_{\min} = R_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+h}} - \mathrm{v}_{\min};$$ $$\Delta\mathrm{v} = R_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+h}}\left(1-\sqrt{\frac{2R_{\mathrm{L}}}{2R_{\mathrm{L}}+h}}\right);$$ $$\Delta\mathrm{v} = R_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+h}}\left(1-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{h}{2R_{\mathrm{L}}}}}\right);$$ $$h \ll 2R_{\mathrm{L}};$$ $$\Delta\mathrm{v} = R_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+h}}\left[1-\left(1-\frac{h}{4R_{\mathrm{L}}}\right)\right];$$ $$\Delta\mathrm{v} = \frac{h}{4}\sqrt{\frac{g_{0\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+h}} \approx 24{,}3\ \mathrm{m/s}.$$ Să presupunem că produsele arderii, având masa totală m, sunt aruncate din ajutajul rachetei în forma unei singure porții, cu viteza relativă u. Scriind legea conservării impulsului, într-un sistem de referință solidar cu nava, care se deplasează cu viteza v, rezultă: $$(M-m)\Delta\mathrm{v} = mu;\ m = M\frac{\Delta\mathrm{v}}{u+\Delta\mathrm{v}};$$ unde M este masa inițială a navei; $$\Delta\mathrm{v} \ll u;\ \ m \approx M\frac{\Delta\mathrm{v}}{u} \approx 29\ \mathrm{kg}.$$	0,10 0,10 0,10 0,10 0,10 0,10 0,10 0,10 0,20 0,20 0,20 0,20 0,20	
b) Activarea motorului cu reacție al navei în punctul A al orbitei circulare, cu scopul aselenizării navei în punctul C, presupune modificarea vectorului viteză al navei în aşa fel încât să se asigure intrarea pe orbita hiperbolică reprezentată în figura 2, al cărei vârf este tangent la suprafața Lunii în punctul C şi în al cărei focar se află centrul Lunii. Evoluția navei de-a lungul hiperbolei se face în aşa fel încât energia mecanică totală a sistemului navă – Lună este $E > 0$. În acord cu legile de conservare ale energiei mecanice totale şi a momentului cinetic, rezultă:	0,30 0,20	**3,00**

 **Fig. 2**	0,30	
$\frac{m v_0^2}{2} - K\frac{mM}{R_L+h} = \frac{m v_{max}^2}{2} - K\frac{mM}{R_L};$	0,30	
$v^2 + (\Delta v)^2 - 2\frac{KM}{R_L+h} = v_{max}^2 - 2\frac{KM}{R_L};$	0,20	
$v^2 + (\Delta v)^2 - 2\frac{g_{0L}R_L^2}{R_L+h} = v_{max}^2 - 2g_{0L}R_L;$	0,20	
$v = R_L\sqrt{\frac{g_{0L}}{R_L+h}};\ (\Delta v)^2 = v_{max}^2 - 2g_{0L}R_L + 2\frac{g_{0L}R_L^2}{R_L+h} - \frac{g_{0L}R_L^2}{R_L+h};$	0,20	
$(\Delta v)^2 = v_{max}^2 - 2g_{0L}R_L + \frac{g_{0L}R_L^2}{R_L+h};$	0,20	
$(\Delta v)^2 = v_{max}^2 - g_{0L}R_L\frac{R_L+2h}{R_L+h};$	0,20	
$v(R_L+h) = v_{max}R_L;\ v_{max} = v\frac{R_L+h}{R_L} = (R_L+h)\sqrt{\frac{g_{0L}}{R_L+h}};$	0,30	
$\Delta v = \sqrt{\frac{h^2 g_{0L}}{R_L+h}} \approx 97$ m/s,	0,30	
astfel încât masa de combustibil consumat pentru executarea manevrei de aselenizare în acest caz este:		
$m \approx M\frac{\Delta v}{u} = 116$ kg.	0,30	

c) La momentul inițial, centrul de masă, CM, al sistemului se determină ca centru de masă al unui sistem format dintr-o sferă cu densitatea ρ_1 şi o sferă cu densitatea $(\rho_2 - \rho_1)$, unde ρ_1 este densitatea gazului care umple sfera cu raza R şi ρ_2 este densitatea gazului care umple sfera cu raza R/2.	0,50	3,00
După explozie, centrul de masă al aparatului este centrul de masă al sferei cu raza R, plină cu amestecul gazos rezultat, având densitatea ρ.	0,50	
Explozia din aparat nu modifică poziția centrului de masă al sistemului. Deoarece după explozie, întregul aparat se deplasează pe distanța a, însemnează că centrul de masă al aparatului se află la distanța a față de poziția inițială a centrului sferei mari, aşa cum indică figura 3.  **Fig. 3**	0,50 0,50	
Rezultă: $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{R+14a}{R-2a}$; $\rho = \frac{7}{8}\rho_1 + \frac{1}{8}\rho_2$;	0,50	
$\frac{p}{p_1} = \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{R}{R-2a} = 2.$	0,50	
Oficiu		**1,00**

FOAIE DE RĂSPUNSURI

Aselenizarea unei nave cosmice

a) Orbita inițială și orbita de aselenizare (denumire) ale navei, precum și orientarea variației vectorului viteză necesară transferului pe orbita de aselenizare, sunt cele reprezentate în figura 1.

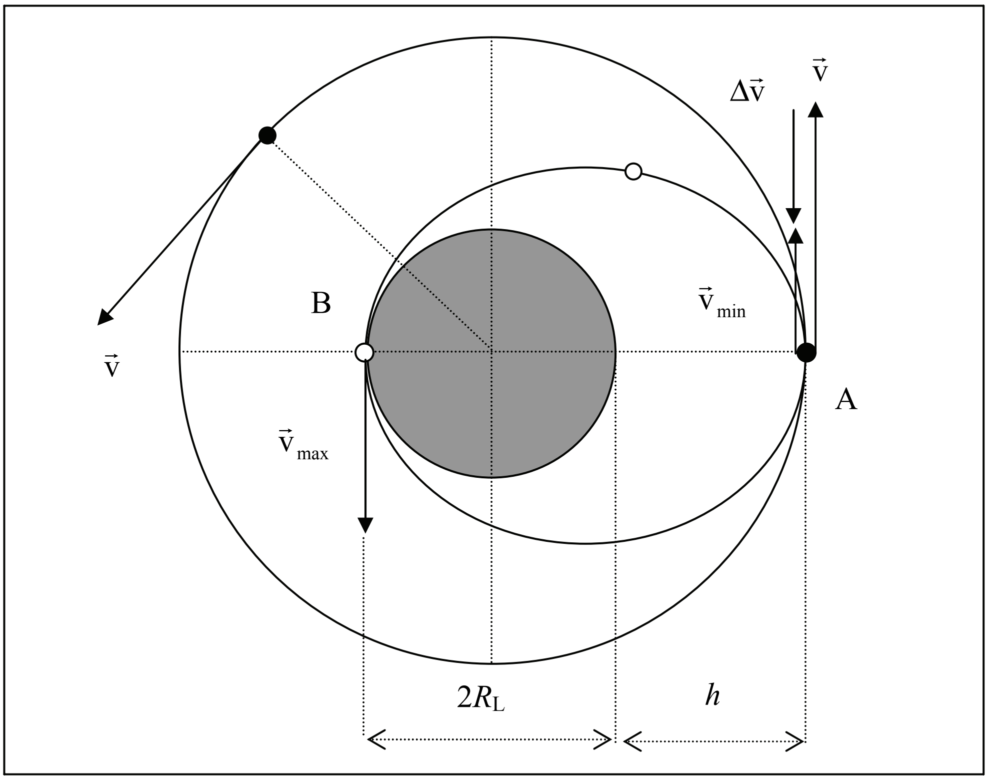


Fig. 1

Variația vectorului viteză al navei, necesară transferului navei pe orbita de aselenizare tangentă la suprafața Lunii în punctul B, are modulul (Δv):

$$\Delta v = R_L\sqrt{\frac{g_{0L}}{R_L + h}}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+\frac{h}{2R_L}}}\right);$$

$$h \ll 2R_L; \quad \Delta v = \frac{h}{4}\sqrt{\frac{g_{0L}}{R_L + h}}.$$

Valoarea numerică a modulului variației vectorului viteză este :

$$\boxed{\Delta \mathrm{v} \approx 24{,}3\ \mathrm{m/s}.}$$

Cantitatea de combustibil necesară manevrei de transfer pe orbita de aselenizare este:

$$m = M\frac{\Delta \mathrm{v}}{u + \Delta \mathrm{v}};$$

$$\Delta \mathrm{v} << u;\ m \approx M\frac{\Delta \mathrm{v}}{u} \approx 29\ \mathrm{kg}.$$

b) Orbita inițială şi orbita de aselenizare (denumire) ale navei, precum şi orientarea variației vectorului viteză necesară transferului pe orbita de aselenizare, sunt cele reprezentate în figura 2.

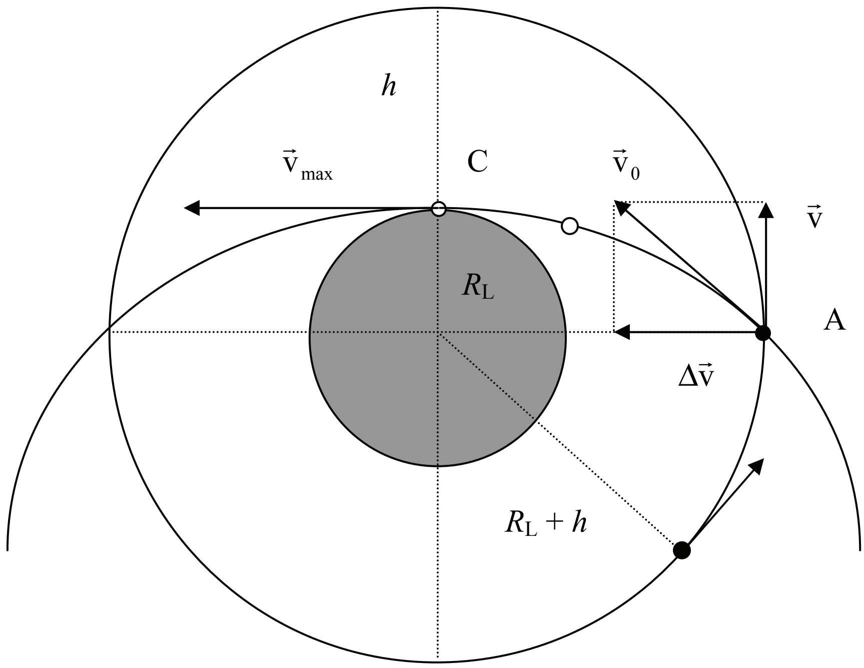


Fig. 2

Variația vectorului viteză al navei, necesară transferului navei pe orbita de aselenizare tangentă la suprafața Lunii în punctul C, are modulul $(\Delta \mathrm{v})$:

$$\Delta \mathrm{v} = \sqrt{\frac{h^2 g_{0L}}{R_L + h}}$$

şi valoarea numerică:

$$\Delta \mathrm{v} \approx 97\ \mathrm{m/s}.$$

Cantitatea de combustibil necesară acestei manevre de transfer pe orbita de aselenizare este:

$$m \approx M \frac{\Delta \mathrm{v}}{u} = 116 \text{ kg}.$$

Explozie într-un aparat cosmic

c) Raportul presiunilor finală şi iniţială ale gazului din sfera exterioară este:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{R}{R - 2d} = 2.$$