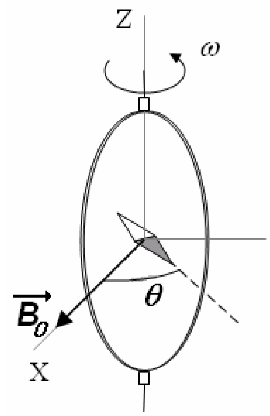
V. Vechi …….dar bune

V.A. Determinarea valorii etalonului ohm (Kelvin) (4,5 puncte)

Dezvoltarea explozivă a ştiinței şi tehnologiei de la începutul secolului al XIX–lea a condus la necesitatea definirii unor mărimi electrice conforme unor standarde universal acceptate. Se considera, greşit, că noile mărimi absolute ar trebui să fie exprimate numai în funcție de etaloanele pentru unitățile de masă, lungime şi timp aşa cum acestea au fost stabilite după revoluția franceză. În anul 1860 Lordul Kelvin a folosit metoda descrisă în problemă ca să stabilească etalonul pentru ohm.



O bobină îngustă, circulară, cu N spire, cu rază a şi rezistență totală R, electric închisă, este rotită uniform cu viteza unghiulară ω în jurul unui diametru vertical într-un câmp magnetic orizontal cu inducția $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{i}$.

a. Determină tensiunea electromotoare ε indusă în bobină.

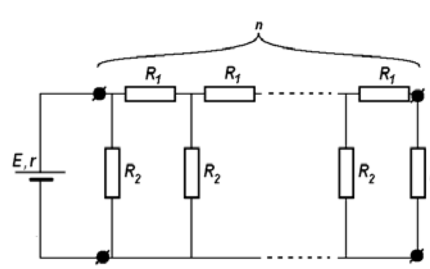
b. Determină puterea medie $\langle P \rangle$ necesară pentru menținerea spirei în mişcare.
Vei neglija inductanța proprie a bobinei.

Un ac magnetic mic este plasat în centrul bobinei ca în figura V.1. Acul magnetic este liber să se rotească în plan orizontal în jurul axei Z. Mişcarea sa este însă lentă, astfel că el nu poate urmări rotația rapidă a bobinei.
Atunci când regimul său staționar este stabilit, acul magnetic va fi orientat astfel încât să facă un unghi mic θ, cu $\vec{B}_0$.

c. Exprimă rezistența electrică R a bobinei în funcție de acest unghi şi mărimile caracteristice sistemului.

Valoarea medie $\langle X \rangle$ a cantității $X(t)$ într-un proces periodic cu perioada T este $\langle X \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$; în cursul rezolvării ai putea avea nevoie de următoarele integrale – presupuse cunoscute $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos x\, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x\, dx = 0$ $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \pi$,

V.B. Kirchhoff versus sursă echivalentă (4,5 puncte)



a. Calculează valoarea intensității curentului care trece prin rezistența R în circuitul din figură în care rezistențele au valorile $R = 17\Omega$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 6\Omega$. Rezistența internă a sursei are valoarea $r = 3\Omega$ iar tensiunea electromotoare a sursei este $E = 10V$ .Secțiunea alcătuită din rezistențele R_1 şi R_2 se repetă de $n = 11$ ori.
b. Calculează valoarea intensității dacă secțiunea se repetă de un număr infinit de ori.

Notă: Se acordă un punct din oficiu.

V.A. Determinarea valorii etalonului ohm - Soluție

Dacă vei considera că la momentul inițial unghiul dintre normala la suprafața bobinei şi direcția câmpului magnetic este zero, atunci, la momentul *t* unghiul făcut de normala la suprafață cu direcția câmpului magnetic este

$$\alpha = \omega \cdot t \qquad (V.1)$$

Dacă vei considera câmpul magnetic pe direcția axei Ox de versor $\vec{i}$ poți scrie că

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{i} \qquad (V.2)$$

Vectorul suprafață $\vec{S}$ va avea expresia

$$\vec{S} = \pi a^2 \left(\cos \omega t \, \vec{i} + \sin \omega t \, \vec{j}\right) \qquad (V.3)$$

În consecință, fluxul prin suprafața care poate fi scris

$$\phi = N \vec{B}_0 \cdot \vec{S} \qquad (V.4)$$

devine

$$\phi = N \pi a^2 B_0 \cos \omega t \qquad (V.5)$$

Tensiunea electromotoare indusă în bobină care are expresia generală

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (V.6)$$

poate fi scrisă

$$\varepsilon = N \pi a^2 B_0 \omega \sin \omega t \qquad (V.7)$$

Puterea instantanee în bobină este

$$\begin{cases} p = \dfrac{\varepsilon^2}{R} \\ p = \dfrac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{R} \end{cases} \qquad (V.8)$$

Conform definiției, puterea medie are expresia

$$\begin{cases} \langle P \rangle = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T p(t) dt \\ \langle P \rangle = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T \dfrac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{R} dt \\ \langle P \rangle = \dfrac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{TR} \displaystyle\int_0^T \sin^2 \omega t \, dt \end{cases} \qquad (V.9)$$

şi, dacă ții seama că

$$< \sin^2 \omega\, t >= \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t\, dt = \frac{1}{2} \qquad (V.10)$$

rezultă pentru puterea medie expresia

$$\langle P \rangle = \frac{\left(N\,\pi\, a^2 B_0 \omega\right)^2}{2R} \qquad (V.11)^*$$

Deoarece bobina este parcursă de curent, ea generează un câmp magnetic cu inducția $\vec{B}_i$ având modulul

$$B_i = \frac{\mu_0 N I}{2a} \qquad (V.12)$$

Valoarea curentului prin bobină este

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \qquad (V.13)$$

şi ținând seama de (4.7)

$$B_i = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0\, \omega}{2R}\sin\omega t \qquad (V.14)$$

Deoarece bobina se roteşte, valoarea instantanee a inducție sale are expresia

$$\begin{cases} \vec{B}_i = B_i\left(\cos\omega t\, \vec{i} + \sin\omega t\, \vec{j}\right) \\ \vec{B}_i = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi a B_0\, \omega}{2R}\sin\omega t\left(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}\right) \end{cases} \qquad (V.15)$$

Acul magnetic se va afla sub acțiunea câmpului magnetic total $\vec{B}_t$ rezultat din compunerea câmpului aplicat cu câmpul datorat curentului indus în bobină

$$\begin{cases} \vec{B}_t = \vec{B}_0 + \vec{B}_i \\ \vec{B}_t = \vec{B}_0 + \dfrac{\mu_0 N^2 \pi a B_0\, \omega}{2R}\sin\omega t\left(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}\right) \\ \vec{B}_t = \left(\dfrac{\mu_0 N^2 \pi a B_0\, \omega}{2R}\sin\omega t\cdot\cos\omega t + B_0\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\mu_0 N^2 \pi a B_0\, \omega}{2R}\sin^2\omega t\right)\vec{j} \end{cases} \qquad (V.16)$$

Acul magnetic „simte" valoarea medie a inducției câmpului magnetic. Valorile medii se pot scrie pe componente, pentru inducția $\vec{B}_i$ a câmpului indus datorat bobinei în rotație, singurul care variază în timp că

$$\begin{cases} \langle B_{ix} \rangle = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi a B_0\, \omega}{2R}\langle \sin\omega t\cos\omega t \rangle = 0 \\ \langle B_{iy} \rangle = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi a B_0\, \omega}{2R}\langle \sin^2\omega t \rangle = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi a B_0\, \omega}{4R} \end{cases} \qquad (V.17)$$

În scrierea relaţiilor de mai sus trebuie să ţii seama de (3.1) şi (3.2).

Din (4.16) şi (4.17) rezultă

$$\langle \vec{B}_t \rangle = B_0\,\vec{i} + \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0\,\omega}{4R}\,\vec{j} \qquad (V.18)$$

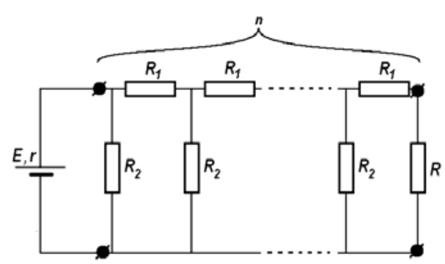
Deoarece acul magnetic se aşează pe direcţia câmpului magnetic mediu rezultant, unghiul θ pe care acul îl face cu direcţia câmpului magnetic inductor are

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R} \qquad (V.19)$$

Corespunzător, valoarea rezistenţei bobinei este

$$R = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4 \cdot \mathrm{tg}\,\theta} \qquad (V.20)^*$$

a. Calculează valoarea intensităţii curentului care trece prin rezistenţa R în circuitul din figură în care rezistenţele au valorile $R = 17\Omega$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 6\Omega$. Rezistenţa internă a sursei are valoarea $r = 3\Omega$ iar tensiunea electromotoare a sursei este $E = 10V$. Secţiunea alcătuită din rezistenţele R_1 şi R_2 se repetă de $n = 11$ ori.



b. Calculează valoarea intensităţii dacă secţiunea se repetă de un număr infinit de ori.

V.B. Kirchhoff versus surse echivalente

Calculul direct, folosind legile Kirchhoff este complicat şi cere timp îndelungat. O metodă simplă se bazează pe determinarea unei echivalenţe între circuitele din figurile 3.1(a) şi (b).

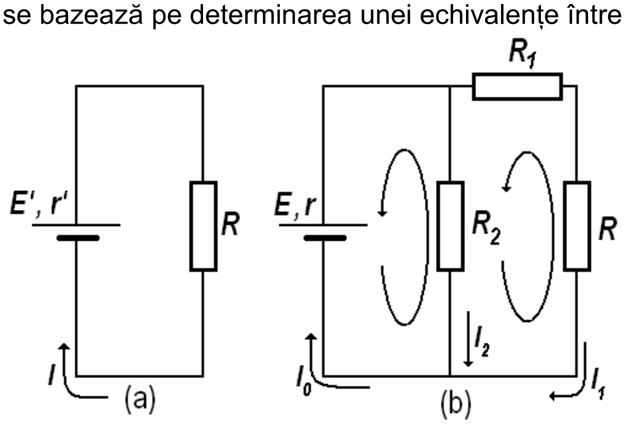


Figura V.1

Intensitatea curentului care trece prin circuitul din figura 3.1.(a) este

$$I = \frac{E'}{r' + R} \qquad (V.21)$$

Folosind notaţiile din figura 3.1.b se pot scrie legile Kirchhoff sub forma

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_0 \\ -I_1 \cdot (R_1 + R) + I_2 \cdot R_2 = 0 \\ I_0 \cdot r + I_2 \cdot R_2 = E \end{cases} \qquad (V.22)$$

Eliminând I_0 între prima şi ultima ecuație din sistemul de mai sus rezultă

$$\begin{cases} -I_1 \cdot (R_1 + R) + I_2 \cdot R_2 = 0 \\ I_1 \cdot r + I_2 \cdot (R_2 + r) = E \end{cases} \qquad (V.23)$$

Eliminând I_2 rezultă

$$\begin{cases} I_1 \cdot r + (R_2 + r) \cdot I_1 \cdot \dfrac{(R_1 + R)}{R_2} = E \\ I_1 \cdot \left(\dfrac{r \cdot R_2 + R_1 R_2 + R_2 R + r \cdot R_1 + r \cdot R}{R_2} \right) = E \end{cases} \qquad (V.24)$$

şi I_1 se poate scrie sub forma

$$I_1 = \frac{E \cdot \dfrac{R_2}{r + R_2}}{R + \dfrac{r \cdot (R_1 + R_2) + R_1 R_2}{r + R_2}} \qquad (V.25)$$

Prin identificare,

$$\begin{cases} E' = E \cdot \dfrac{R_2}{r + R} \\ r' = \dfrac{r \cdot (R_1 + R_2) + R_1 R_2}{r + R_2} \end{cases} \qquad (V.26)$$

Folosind valorile numerice,

$$\begin{cases} E' = E \cdot \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} E = \dfrac{20}{3} V \\ r' = 3\Omega \end{cases} \qquad (V.27)$$

Adăugarea unei noi secțiuni revine la considerarea unei noi surse cu rezistența internă de 3Ω şi cu tensiunea electromotoare diminuată în raportul $\eta = 2/3$.
Curentul prin rezistență pentru 11 celule are valoarea

$$I_{11} = \frac{E}{R + r} \eta^{11} = \frac{10}{20} (2/3)^{11} \cong 5{,}78\, mA \qquad (V.28)$$

b. Pentru un număr infinit de celule intensitatea curentului este, evident, nulă.