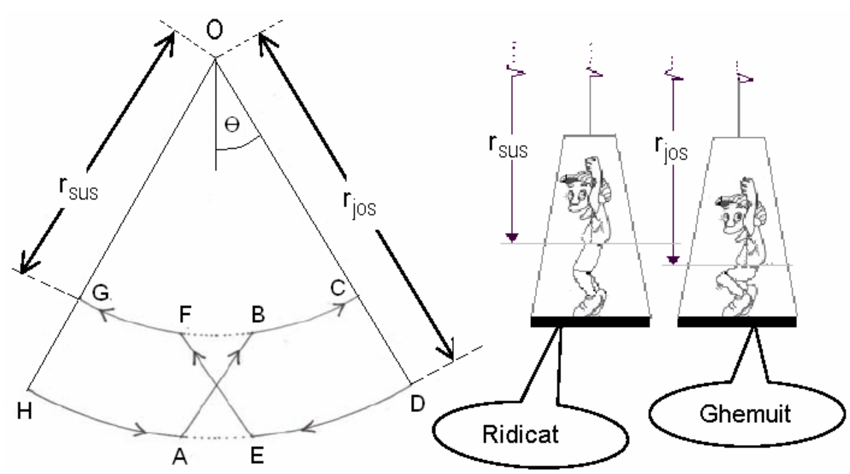
Leagăn

Un copil se dă în leagăn, ridicându-se şi ghemuindu-se.
Traiectoria descrisă de centrul de masă al copilului este ilustrată în figura de mai jos. Notează cu r_{sus} distanța de la punctul de suspensie O al leagănului până la centrul de masă al copilului, când acesta stă ridicat şi cu r_{jos} distanța de la punctul de suspensie al leagănului până la centrul de masă al copilului când acesta stă ghemuit. Consideră că $\frac{r_{jos}}{r_{sus}} = 2^{1/10} \cong 1{,}072$, ceea ce evidențiază faptul că acest copil îşi deplasează centrul de masă cu aproximativ $7\,\%$ din distanța medie de la leagăn la punctul de sprijin.

Pentru a face o analiză simplă, presupune că masa leagănului este neglijabilă, că amplitudinea mişcării leagănului rămâne suficient de mică şi după n oscilații şi că masa copilului este concentrată în centrul său de masă. Presupune de asemenea că trecerea de la poziția *ghemuit* la poziția *ridicat* (trecerea de la A la B şi de la E la F) se desfăşoară rapid, comparativ cu perioada de oscilație a leagănului şi că poate fi considerată instantanee. În mod similar presupune că tranziția de la poziția *ridicat* la poziția *ghemuit* (trecerea de la C la D şi de la G la H) poate fi considerată instantanee.



Determină, în aceste condiții, numărul de oscilații, după care valoarea maximă a vitezei unghiulare a sistemului leagăn-copil se dublează.

Soluție

Consideră sistemul leagăn-copil, în care conform enunțului masa leagănului este neglijabilă; notează cu M masa copilului, şi cu ω_A valoarea maximă a vitezei unghiulare a sistemului în momentul când copilul începe să se ridice şi apoi să ghemuiască.

Conform enunțului, ridicarea respectiv ghemuirea copilului în leagăn (trecerea de la A la B sau de la E la F, respectiv trecerea de la C la D sau de la G la H) se desfăşoară rapid, comparativ cu perioada de oscilație a sistemului şi poate fi considerată instantanee.

În procesul de ridicare rapidă a copilului între pozițiile A şi B de pe traiectorie, momentul cinetic al acestuia se conservă

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B \qquad \text{(IV. 1)}$$

şi prin urmare

$$r_{jos} \cdot \omega_A^{\ 2} = r_{sus} \cdot \omega_B^{\ 2} \quad \text{(IV. 2)}$$

Considerând ca nivel de referință la care energia potențială gravitațională este zero, nivelul orizontal ce trece prin A se poate scrie expresia energiei mecanice totale a sistemului în starea A

$$E_A = \frac{1}{2} M \cdot r_{jos}^{\ 2} \cdot \omega_A^{\ 2} \quad \text{(IV. 3)}$$

Când copilul este ghemuit şi se află în poziția B de pe traiectorie, sistemul analizat are energia

$$E_B = \frac{1}{2} M \cdot r_{sus}^{\ 2} \cdot \omega_B^{\ 2} + M \cdot g \cdot h \quad \text{(IV. 4)}$$

în care h reprezintă distanța pe verticală pe care se deplasează centrul de masă al copilului

$$h = r_{jos} - r_{sus} \quad \text{(IV. 5)}$$

Întrucât amplitudinea mişcării leagănului este considerată mică chiar şi după n oscilații, poți considera că nu apare o deplasare semnificativă a centrului de masă a copilului între pozițiile B şi C şi că energia mecanică totală în starea C are expresia

$$E_C = E_B = \frac{1}{2} M \cdot r_{sus}^{\ 2} \cdot \omega_B^{\ 2} + M \cdot g \cdot h \quad \text{(IV. 6)}$$

Când copilul se ghemuieşte, el îşi micşorează energia mecanică cu cantitatea $M \cdot g \cdot h$. Prin urmare energia totală a sistemului leagăn copil în starea D este

$$E_D = \frac{1}{2} M \cdot r_{sus}^{\ 2} \cdot \omega_B^{\ 2} \quad \text{(IV. 7)}$$

Legea conservării energiei aplicată deplasării sistemului între D şi E conduce la relația

$$E_E = E_D = \frac{1}{2} M \cdot r_{sus}^{\ 2} \cdot \omega_B^{\ 2} \quad \text{(IV. 8)}$$

Pe de altă parte

$$E_E = \frac{1}{2} M \cdot r_{jos}^{\ 2} \cdot \omega_E^{\ 2} \quad \text{(IV. 9)}$$

Din combinarea relațiilor (IV.8) (IV.9) şi (IV.2) rezultă

$$\frac{\omega_E}{\omega_A} = \frac{r_{jos}}{r_{sus}} \quad \text{(IV. 10)}$$

Continuând în acelaşi mod raționamentul şi pentru porțiunea de traiectorie EFGHA se obține

$$\frac{\omega_{A1}}{\omega_E} = \frac{r_{jos}}{r_{sus}} \quad \text{(IV. 11)}$$

Înmulțind ultimele două relații (IV.10) şi (IV.11) se obține

$$\frac{\omega_{A1}}{\omega_A} = \left(\frac{r_{jos}}{r_{sus}}\right)^2 \quad \text{(IV. 12)}$$

Relația (IV.12) exprimă creşterea valorii maxime a vitezei unghiulare după o oscilație a sistemului şi se poate
generaliza uşor. Astfel, după n oscilații valoarea maximă ω_{An} a vitezei unghiulare a sistemului va satisface relația

$$\frac{\omega_{An}}{\omega_A} = \left(\frac{r_{jos}}{r_{sus}}\right)^{2n} \quad \text{(IV. 13)}$$

Dar, conform enunțului

$$\frac{\omega_{An}}{\omega_A} = 2 \quad \text{(IV. 14)}$$

Ținând cont de (IV.13), de (IV.14) si de faptul că

$$\frac{r_{jos}}{r_{sus}} = 2^{\frac{1}{10}} \qquad \text{(IV. 15)}$$

se obține ecuația

$$2 = 2^{\frac{2n}{10}} \qquad \text{(IV. 16)}$$

cu soluția

$$n = 5 \qquad \text{(IV. 17)}$$

Aprinderea hârtiei

În problema care urmează ți se cere o estimare a valorii unei mărimi şi nu se aşteaptă să dai un răspuns precis. Indică aproximațiile pe care le faci pentru estimarea valorii mărimii cerute.

Într-o zi însorită de vară, la amiază vrei să aprinzi o bucată de hârtie, concentrând razele de lumină provenite de la Soare, cu ajutorul unei lupe cu distanța focală $f = 150\,mm$ şi diametrul $D = 50\,mm$.

Cunoscând:

- diametrul unghiular al Soarelui $\alpha = 4{,}6\,mrad$;
- fluxul termic primit de Pământ de la Soare $J_S = 1400\ W \cdot m^{-2}$;
- temperatura mediului înconjurător $T_0 = 300\,K$;
- masa unității de suprafață a bucății de hârtie $\sigma = 80\,g \cdot m^{-2}$;
- căldura specifică a hârtiei $c = 10^3\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$;
- raportul dintre puterea absorbită şi cea incidentă $\gamma = 10^{-2}$;
- temperatura de aprindere a hârtiei $T_{aprindere} = 505\,K$

estimează intervalul de timp după care foaia de hârtie se va aprinde.

Prof. Drd. Delia Davidescu – Inspector de Fizică – Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar MEdC– Bucureşti
Prof. Dr. Adrian Dafinei – Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti

Soluție

Problema propune estimarea intervalul de timp necesar încălzirii unei porțiuni dintr-o bucată de hârtie până la temperatura de aprindere. Încălzirea se realizează utilizând o lupă care focalizează lumina solară într-o zonă de mici dimensiuni de pe bucata de hârtie.

Presupune că Soarele este sferic şi plasat la infinit; astfel imaginea acestuia formată cu ajutorul lupei va fi un disc, situat în planul focal al lupei. Dacă se aşează bucata de hârtie chiar în planul focal al lupei, atunci pe aceasta se va forma un disc luminos cu raza minimă R.

Ținând cont că distanța focală a lupei este f şi că diametrul unghiular sub care se vede Soarele este α, raza R a discului luminos format în planul focal al lupei are expresia

$$R \cong \frac{f \cdot \alpha}{2} \qquad \text{(IV.18)}$$

Notează cu P_c puterea termică provenită de la Soare şi colectată de lupa de diametru D

$$P_c = J_S \frac{\pi D^2}{4} \qquad \text{(IV.19)}$$

Din această putere, bucata de hârtie absoarbe cantitatea P_{abs}

$$P_{abs} = \gamma P_c \qquad \text{(IV.20)}$$

a cărei expresie se obține din combinarea relațiilor (IV.19) şi (IV.20)

$$P_{abs} = \gamma \cdot J_S \cdot \frac{\pi D^2}{4} \qquad \text{(IV.21)}$$

Reține că această putere revine numai acelei porțiuni din bucata de hârtie care este iluminată de lupă. Masa acestei porțiuni din bucata de hârtie este

$$m = \sigma \pi R^2 \qquad \text{(IV.22)}$$

La momentul de timp $t_0 = 0$, la care începe iluminarea bucății de hârtie cu ajutorul lupei, energia termică inițială U_0 înmagazinată în zona cu aria πR^2 din bucata de hârtie aflată la temperatura mediului ambiant T_0 are expresia

$$U_0 = \sigma \pi R^2 c T_0 \qquad \text{(IV.23)}$$

La momentul de timp t de la începerea iluminării bucății de hârtie, temperatura acesteia în zona spotului luminos devine $T(t)$, iar energia termică înmagazinată în respectiva zonă are expresia

$$U(t) = \sigma \pi R^2 c T(t) \qquad \text{(IV.24)}$$

Întrucât

$$\frac{dU}{dt} = P_{abs} \qquad \text{(IV.25)}$$

se obține

$$U(t) = U_0 + P_{abs} \cdot t \qquad \text{(IV.26)}$$

Combinând relațiile (IV.23), (IV.24) şi (IV.25) rezultă dependența de timp a temperaturii bucății de hârtie în zona spotului luminos

$$T(t) = T_0 + \frac{P_{abs}}{\sigma \pi R^2 c} \cdot t \qquad \text{(IV.27)}$$

Din relația (IV.27) se observă că temperatura $T(t)$ a hârtiei în zona spotului luminos este la un moment dat cu atât mai mare cu cât raza R a spotului luminos este mai mică. Aceasta justifică de ce bucata de hârtie ar trebui aşezată chiar în planul focal al lupei.

Intervalul de timp de la începutul focalizării luminii pe bucata de hârtie până la aprinderea acesteia, notat prin $\tau_{aprindere}$ se obține din relația (IV.27), punând condiția ca

$$T = T_{aprindere} \qquad \text{(IV.28)}$$

Acest interval de timp are expresia

$$\tau_{aprindere} = \frac{\sigma \pi R^2 c}{P_{abs}} \left(T_{aprindere} - T_0\right) \qquad \text{(IV.29)}$$

Combinând relațiile (IV.18), (IV.21) şi (IV.29) rezultă

$$\tau_{aprindere} = \frac{\sigma f^2 \alpha^2 c}{\gamma J_S D^2} \left(T_{aprindere} - T_0\right) \qquad \text{(IV.30)}$$

Efectuând calculului numeric, pe baza estimării de mai sus se obține

$$\tau_{aprindere} \cong 0{,}25\, s \qquad \text{(IV.31)}$$

Relația (IV.31) reprezintă răspunsul la cerința problemei.

Presupuneri:

- se neglijează absorbția luminii în sticla din care este confecționată lupa
- incidență normală a luminii pe lupă
- temperatura bucății de hârtie se modifică numai în zona în care este lumina focalizată de lupă determina apariția spotului luminos pe hârtie
- restul bucății de hârtie, deşi este iluminată direct de la Soare (şi absoarbe o anumită putere) nu-şi modifică temperatura