I. Patinaj şi automobilism (9 puncte)

Pe suprafața plană şi orizontală a gheții unui patinoar alunecă cu patinele o fată şi un băiat. Fata se deplasează rectiliniu şi uniform cu viteza $\vec{u}$, de-a lungul diametrului unui cerc, iar băiatul trebuie să se deplaseze pe circumferința aceluiaşi cerc, în aşa fel încât distanța dintre cei doi patinatori să rămână constantă. Pozițiile şi stările inițiale ale celor doi patinatori sunt cele reprezentate în figura 1.

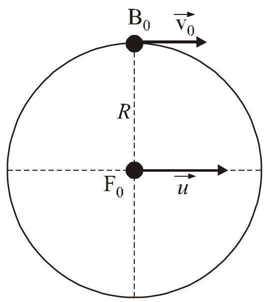

Fig. 1

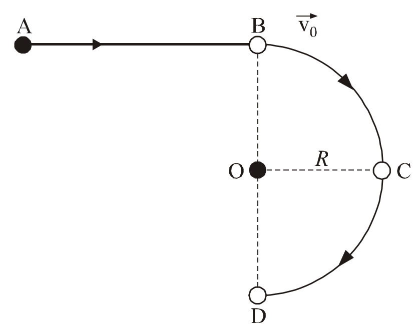

Fig. 2

a) *Să se determine* viteza inițială a băiatului ($\vec{v}_0$), timpul cât regula jocului a putut fi respectată, viteza băiatului la sfârşitul acestui timp ($\vec{v}_f$) şi distanțele parcurse de cei doi patinatori în acest timp. Se cunosc: *R* – raza cercului; μ – coeficientul de frecare al patinelor băiatului cu gheața; *g* – accelerația gravitațională.

b) Un patinator trebuie să ajungă dintr-un punct A, până într-un punct D, urmând traseul orizontal reprezentat în figura 2, plecând din repaus. Lungimea sectorului liniar al traseului este *L*, iar raza sectorului semicircular al traseului este *R.* Pe întregul traseu accelerația patinatorului are valoarea constantă , *a*.

Să se determine durata parcurgerii întregului traseu, în condițiile în care patinatorul doreşte ca această durată să fie minimă.

c) Pe suprafața gheții patinoarului este trasat un pătrat cu lungimea laturii *d. Să se determine* timpul minim necesar unui patinator pentru a parcurge întregul contur al pătratului, dacă accelerația sa nu poate depăşi valoarea *a.*

d) Demarând cu accelerație constantă maximă posibilă, pe un sector rectiliniu şi orizontal al unei şosele, viteza unui automobil creşte de la valoarea v_1, până la o valoare v_2 foarte apropiată, într-un timp Δt_1.

Să se determine timpul după care se va realiza aceeaşi creştere a vitezei, dacă automobilul se află pe un sector de pe aceeaşi şosea, în aceleaşi condiții, având forma unui arc de cerc cu raza *R*, situat într-un plan orizontal. *Să se determine* valoarea razei arcului de cerc al şoselei pentru care, în condițiile date, este imposibilă creşterea vitezei automobilului peste valoarea v_1.

e) La distanța *r* față de centrul cercului din care face parte sectorul de drum pe care se deplasează automobilul se află în repaus un observator. Automobilul se deplasează uniform cu viteza v, în aşa fel încât distanța dintre el şi observator este din ce în ce mai mică.

Să se stabilească poziția automobilului pentru care viteza de apropiere a sa față de observator este maximă şi să se determine valoarea acestei viteze maxime. *Să se determine* timpul după care se realizează această condiție, dacă la momentul inițial distanța dintre automobilul aflat pe sectorul circular al şoselei şi observator avea valoarea maximă posibilă**.**

Patinaj şi automobilism - soluție (9 puncte)

a) Dacă F_0 şi B_0 sunt pozițiile inițiale ale celor doi patinatori, notate în figura 1, când distanța dintre ei este R, iar vitezele lor sunt $\vec{u}$ şi respectiv $\vec{v}_0$ atunci, la un moment ulterior oarecare, în condițiile respectării regulii jocului, pozițiile lor sunt F şi respectiv B, cu vitezele $\vec{u}$ şi respectiv $\vec{v}$, astfel încât distanța dintre ei nu s-a schimbat, $BF = R$.
Aceasta presupune că triunghiul pozițiilor patinatorilor față de centrul cercului (ΔOBF) este permanent un triunghi isoscel cu $OB = BF = R$, astfel încât băiatul se află în vârful B al acestui triunghi.

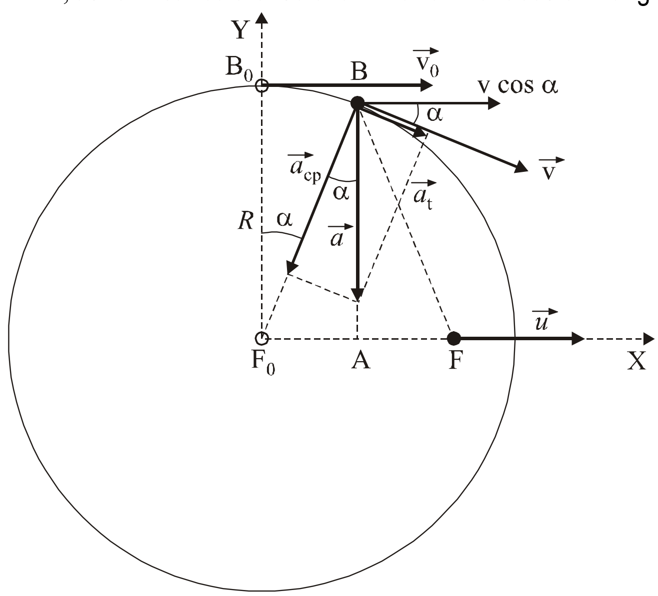

Figura I.1

Ca urmare, deplasarea băiatului de-a lungul axei OX este, în orice moment, egală cu jumătate din deplasarea fetei de-a lungul aceleaşi axe, astfel încât:

$$v_x = v\cos\alpha = \frac{u}{2} = constant, \qquad (I.1)$$

adică proiecția băiatului pe axa OX are o mişcare uniformă, $v_0 = \frac{u}{2}$, ceea ce presupune că vectorul accelerație al băiatului, $\vec{a}$, nu are componentă de-a lungul axei OX, orientarea sa fiind de-a lungul înălțimii triunghiului OBF, deci paralelă cu axa OY.
În aceste condiții, rezultă:

$$v = \frac{u}{2\cos\alpha}; \qquad (I.2)$$

$$a_{cp} = \frac{u^2}{R} = a\cos\alpha; \qquad (I.3)$$

$$a = \frac{v^2}{R\cos\alpha} = \frac{u^2}{4R\cos^3\alpha}. \qquad (I.4)$$

Ceea ce este interesant şi trebuie remarcat, este faptul că mişcarea circulară a băiatului este o mişcare circulară accelerată:

$$\vec{a} = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t, \qquad (I.5)$$

astfel încât modulul lui $\vec{a}$ este crescător, în timp ce orientarea lui $\vec{a}$ este constantă.
Forța care, corespunzător principiului fundamental al dinamicii, trebuie să asigure această accelerație, este forța de frecare dintre patinele băiatului şi gheață:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_f}{m}; \; \vec{F}_f = m\vec{a}. \qquad (I.6)$$

Valoarea maximă posibilă a forței de frecare, $F_{f,\max} = \mu mg$, impune o valoare maximă posibilă pentru accelerația băiatului, $a_{\max} = \mu g$, astfel încât distanța dintre patinatori va rămâne constantă (*R*), numai până în momentul realizării acestei accelerații maxime, pentru care avem:

$$a_{\max} = \frac{u^2}{4R\cos^3\alpha_{\max}} = \mu g; \qquad (I.7)$$

$$\cos\alpha_{\max} = \sqrt[3]{\frac{u^2}{4R\mu g}}. \qquad (I.8)$$

Dacă distanța parcursă de fată, până când unghiul la centru descris de raza vectoare a băiatului a devenit $\alpha_{\max}$, este $d_{\max,F}$, rezultă că durata respectării regulii jocului a fost:

$$t_{\max} = \frac{d_{\max,F}}{u} = \frac{2R\sin\alpha_{\max}}{u}, \qquad (I.9)$$

astfel încât viteza băiatului la momentul $t_{\max}$ se obține:

$$v_{\max}\cos\alpha_{\max} = \frac{u}{2}; \qquad (I.10)$$

$$v_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4R\mu g u}. \qquad (I.11)$$

Distanța maximă parcursă de băiat este:

$$d_{\max,B} = R\alpha_{\max}. \qquad (I.12)$$

b) Valoarea accelerației patinatorului fiind aceeaşi pe întregul traseu, însemnează că atunci când patinatorul evoluează pe sectorul semicircular, accelerația *a* se identifică cu accelerația centripetă, astfel încât:

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R}; \qquad (I.13)$$

$$v = \sqrt{aR}, \qquad (I.14)$$

reprezentând viteza admisibilă pentru deplasarea patinatorului pe sectorul semicircular.
În aceste condiții viteza cu care trebuie să treacă patinatorul de pe sectorul liniar pe cel semicircular trebuie să fie aceea calculată mai sus (v).
Dacă pe întregul sector liniar mişcarea patinatorului ar fi uniform accelerată fără viteză inițială, atunci, la intrarea pe semicerc viteza lui ar fi:

$$v_B = \sqrt{2aL}; \; L > \frac{R}{2}; \; v_B > v, \qquad (I.15)$$

ceea ce ar însemna imposibilitatea menținerii pe semicerc în condițiile impuse.
Ca urmare, sectorul liniar al traseului trebuie parcurs altfel decât uniform accelerat, aşa cum indică figura 2 şi anume: AE – mişcare uniform accelerată, fără viteză inițială, până la realizarea vitezei v; EF – mişcare rectilinie uniform accelerată, de la viteza inițială v, până la viteza v_{max}; FB – mişcare uniform încetinită, cu aceeaşi accelerație, de la viteza inițială v_{max} până la viteza v.

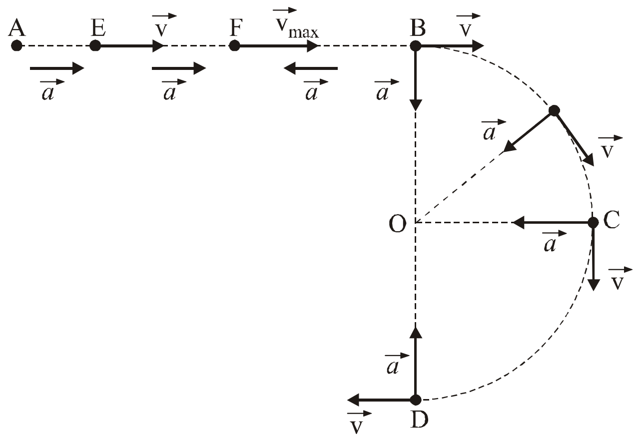

Figura I.2

Rezultă:

$$AE = L_0 = \frac{v^2}{2a} = \frac{R}{2} = \frac{vt_0}{2}; \quad t_0 = \frac{2h_0}{v} = \sqrt{\frac{R}{a}}; \tag{I.16}$$

$$EF = FB = \frac{L - L_0}{2} = vt + \frac{at^2}{2}; \tag{I.17}$$

$$t = \sqrt{\frac{L + \frac{R}{2}}{a}} - \sqrt{\frac{R}{a}}; \tag{I.18}$$

$$t_s = \frac{\pi R}{v} = \pi\sqrt{\frac{R}{a}}; \quad T = t_0 + 2t + t_s; \tag{I.19}$$

$$T = (\pi - 1)\sqrt{\frac{R}{a}} + 2\sqrt{\frac{L + \frac{R}{2}}{a}}. \tag{I.20}$$

c) Parcurgerea fiecărei laturi trebuie să se facă aşa cum indică desenul *a* din figura 3, plecând din repaus şi accelerând până la mijlocul acesteia şi apoi frânând până la oprire la capătul acesteia.

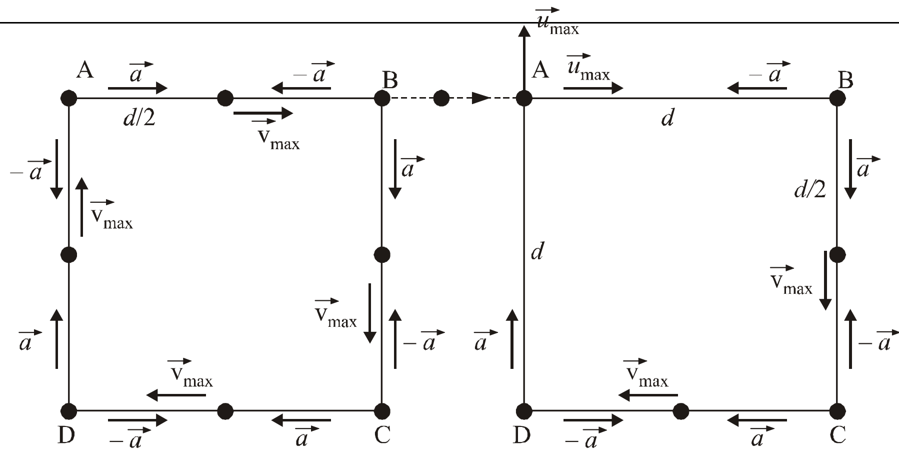

Figura I.3

Virajele de la colțuri, fără oprire, ar implica accelerații foarte mari.
În acest fel durata parcurgerii fiecărei laturi, τ, se distribuie în mod egal, $\tau/2$, pentru parcurgerea fiecărei jumătăți a laturii, $d/2$.
Rezultă:

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{\tau}{2}\right)^2=\frac{d}{2};\qquad (I.21)$$

$$\tau=2\sqrt{\frac{d}{a}};\qquad (I.22)$$

$$T_{\mathrm{a}}=4\tau=8\sqrt{\frac{d}{a}},\qquad (I.23)$$

reprezentând timpul necesar patinatorului pentru a reveni în punctul de start.
Această valoare, T_{a} reprezintă oare timpul minim necesar parcurgerii traseului ABCDA, în condițiile precizate?
Enunțul problemei nu impune ca plecarea din A să se facă din repaus şi nici ca sosirea în A să se facă în repaus.
De aceea, să analizăm varianta prezentată în desenul *b*, când patinatorul intră pe latura AB după un parcurs rectiliniu anterior, care i-a permis realizarea unei viteze $\vec{v}_{max}$, în aşa fel încât frânând de-a lungul întregii laturi AB, să ajungă la capătul acesteia în repaus şi să avem:

$$\frac{1}{2}at^2=d;\qquad (I.24)$$

$$t=\sqrt{2}\sqrt{\frac{d}{a}}.\qquad (I.25)$$

Un timp egal cu acesta, *t,* îi trebuie patinatorului şi pe ultimul sector al traseului, latura CD, pentru ca accelerând, cu plecare din repaus, să părăsească latura pătratului cu viteza $\vec{u}_{max}$.
În aceste condiții, timpul necesar patinatorului pentru a reveni în punctul de start este:

$$T_{\mathrm{b}}=2t+2\tau;\qquad (I.26)$$

$$T_{\mathrm{b}}=2(\sqrt{2}+2)\sqrt{\frac{d}{a}}<T_{\mathrm{a}}.\qquad (I.27)$$

d) Accelerația maximă posibilă de pe sectorul rectiliniu este:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t_1} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t_1}, \qquad (I.28)$$

fiind determinată de forța de frecare.

Atunci când automobilul se deplasează pe un sector circular al aceleiaşi şosele, deoarece forța de frecare este aceeaşi, accelerația determinată de ea este aceeaşi, *a*, dar are acum două componente:

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \\ a^2 = a_t^2 + a_n^2 \end{cases} \qquad (I.29)$$

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t_2} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t_2};\ a_n \approx \frac{v_1^2}{R}, \qquad (I.30)$$

astfel încât, rezultă:

$$\Delta t_2 = \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{\left(\frac{v_2 - v_1}{\Delta t_1}\right)^2 - \left(\frac{v_1^2}{R}\right)^2}}, \qquad (I.31)$$

cu condiția ca:

$$R > \frac{v_1^2 \Delta t_1}{v_2 - v_1}. \qquad (I.32)$$

Creşterea vitezei automobilului peste valoarea v_1, este imposibilă dacă raza cercului din care face parte sectorul considerat este:

$$R_{min} = \frac{v_1^2 \Delta t_1}{v_2 - v_1} = \frac{v_1^2}{a}. \qquad (I.33)$$

e) Corespunzător unui moment oarecare, când automobilul se află într-un punct A, aşa cum indică figura 4, viteza de apropiere a acestuia pe direcția observatorului este:

$$v_a = v \sin\alpha.$$

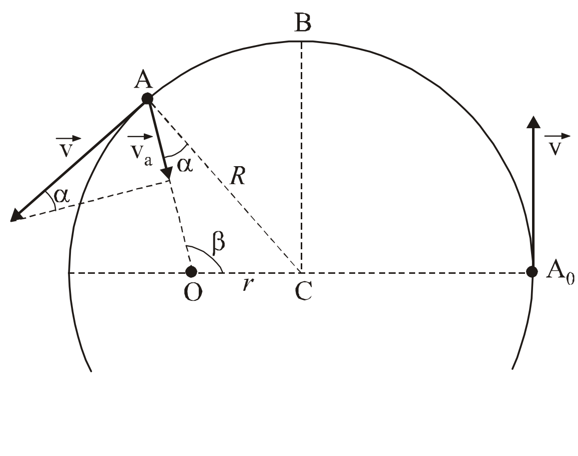

Figura I.4

În acord cu teorema sinusurilor, scrisă pentru triunghiul OAC, rezultă:

$\frac{\sin\beta}{R} = \frac{\sin\alpha}{r}$; (I.34)

$v_a = v\frac{r}{R}\sin\beta$, (I.35)

astfel încât, pentru β = 90º, avem:

$v_{a,\,max} = v\frac{r}{R}$; (I.36)

$t = \frac{R}{v}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{r}{R}\right)$. (I.37)