SELECȚIA LOTULUI LĂRGIT
pentru
OLIMPIADA INTERNAȚIONALĂ DE FIZICĂ
Ediția a 37-a, 2006

PROBLEMA DE MECANICĂ

PLOAIA DE STELE ŞI …DISPARIȚIA UNOR VIEȚUITOARE!

REZOLVARE

b) La distanța r față de centrul asteroidului, în interiorul acestuia (r < R), forța care acționează asupra corpului din tunel, reprezentată în figura 2, în acord cu legea lui Newton este:

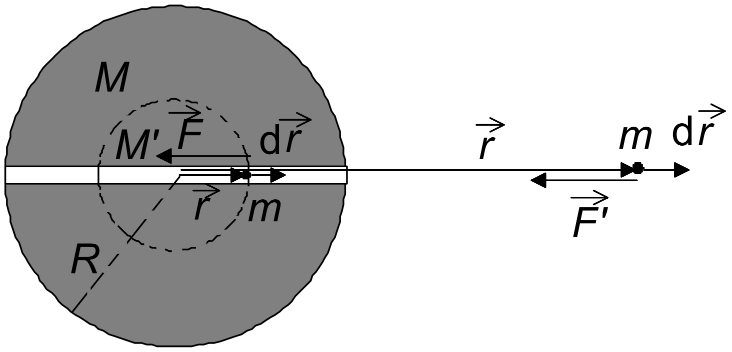

Fig. 2

$$F = K\frac{mM'}{r^2},$$

unde *M*' este masa sferei cu raza *r*;

$$\frac{M}{R^3} = \frac{M'}{r^3}; M' = M\frac{r^3}{R^3},$$

deoarece asteroidul este omogen;

$$F = K\frac{mM}{R^3}r; k = K\frac{mM}{R^3}; \vec{F} = -k\vec{r},$$

evidențiind că aceasta este o forță „de tip elastic" (direct proporțională cu elongația şi de sens contrar acesteia).

Ca urmare, mişcarea corpului în tunel, eliberat de la gura acestuia, este o mişcare oscilatorie armonică, cu perioada:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{KM}},$$

astfel încât viteza maximă a acestuia, atinsă în momentul trecerii prin centrul tunelului, este:

$$v_{max} = \omega R = \sqrt{\frac{KM}{R}},$$

tot atât cât este viteza unui satelit care ar evolua în jurul asteroidului, pe o orbită circulară foarte joasă.

***Observație*:** pătura sferică omogenă, cu grosimea *R – r,* nu are nici o influență gravitațională asupra corpului aflat sub aceasta.

Când corpul se află în afara asteroidului, la distanța r față de centrul acestuia, în acord cu aceeași lege a lui Newton, asupra acestuia acționează forța:

$$F' = K\frac{mM}{r^2}; \vec{F}' = -K\frac{mM}{r^3}\vec{r},$$

evidențiind o variație invers proporțională cu pătratul distanței până la centrul Pământului.

Atunci când corpul se deplasează din interiorul tunelului, de la distanța r față de centrul asteroidului și ajunge la infinit, în acord cu teorema variației energiei potențiale, avem:

$$\Delta E_{\text{p;interior-infinit}} = -\int_r^R \vec{F}d\vec{r} - \int_R^\infty \vec{F}'d\vec{r};$$

$$\Delta E_{\text{p;interior-infinit}} = \int_r^R F dr + \int_R^\infty F' dr;$$

$$\Delta E_{\text{p;interior-infinit}} = \frac{KmM}{R^3}\int_r^R r dr + KmM\int_R^\infty \frac{dr}{r^2};$$

$$\Delta E_{\text{p;interior-infinit}} = K\frac{mM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right);$$

$$\Delta E_{\text{p;interior-infinit}} = E_{\text{p},\infty} - E_{\text{p,interior}}; E_{\text{p},\infty} = 0;$$

$$E_{\text{p,interior}} = -K\frac{mM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right); \quad 0 \le r \le R.$$

În particular, când corpul se află în centrul asteroidului (r = 0), energia potențială de interacțiune gravitațională a sistemului corp – asteroid, este:

$$E_{\text{p},0} = -\frac{3}{2}K\frac{mM}{R},$$

iar când corpul a ajuns la suprafața asteroidului, energia potențială de interacțiune gravitațională a sistemului corp – asteroid, este:

$$E_{p,R} = -K\frac{mM}{R}.$$

Atunci când corpul se deplasează din exteriorul asteroidului, de la distanța r față de centrul asteroidului și ajunge la infinit, în acord cu teorema variației energiei potențiale, avem:

$$\Delta E_{\text{p;exterior}} = -\int_r^\infty \vec{F}'d\vec{r} = \int_r^\infty F' dr = KmM\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = K\frac{mM}{r};$$

$$\Delta E_{\text{p;exterior}} = E_{\text{p};\infty} - E_{\text{p;exterior}}; E_{p;} = 0;$$

$$E_{\text{p;exterior}} = -K\frac{mM}{r}; r \ge R.$$

În particular, când corpul se află pe suprafața asteroidului (r = R), energia potențială de interacțiune gravitațională a sistemului corp – asteroid, este:

$$E_{\text{p},R} = -K\frac{mM}{R}.$$

În figura 3 sunt reprezentate graficele dependențelor $F(r)$ și $E_{\text{p}}(r)$.

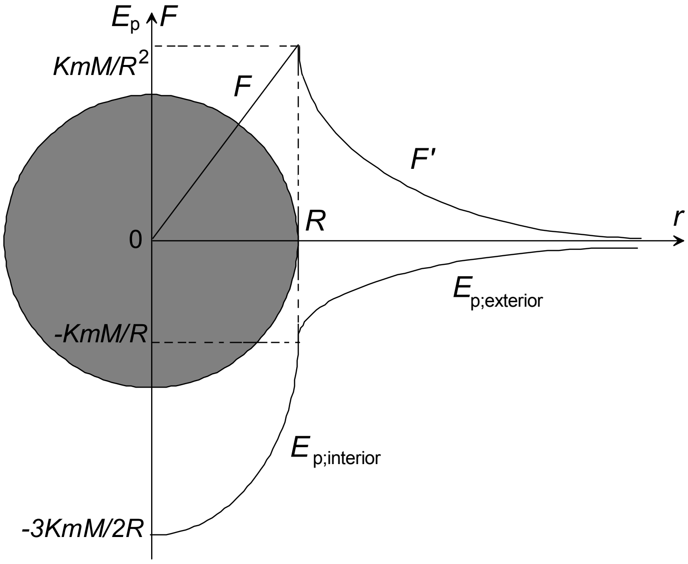

Fig. 3

c) Lansat din centrul asteroidului, corpul trebuie să poată ajunge la gura tunelului şi de aici, părăsind tunelul, corpul trebuie să poată sosi undeva foarte departe de asteroid. Corespunzător notațiilor din figura 4, în acord cu legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$\frac{m\mathrm{v}_{\min}^2}{2} - \frac{3}{2}K\frac{mM}{R} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} - K\frac{mM}{R};$$

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_{\min}^2 - \frac{KM}{R};$$

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2} - K\frac{mM}{R} = 0; \mathrm{v}^2 = 2\frac{KM}{R};$$

$$\mathrm{v}_{\min} = \sqrt{3\frac{KM}{R}}.$$

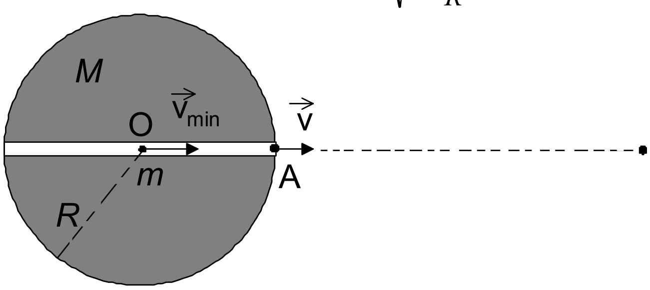

Fig. 4