Soluție:

În fibra optică lumina se propagă cu viteza $c' = \frac{c}{n}$ şi are lungimea de undă $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$, unde $\lambda$ reprezintă lungimea de undă corespunzătoare, în vid.

**a.** Intervalul de timp după care fasciculul care se propagă prin fibra optică, în sensul acelor de ceasornic revine prima dată în P se determină din relația

$$t^{+} = \frac{2\pi R + R\Omega t^{+}}{c'} \qquad (1)$$

obținându-se

$$t^{+} = \frac{2\pi R}{c'\left(1 - \frac{R\Omega}{c'}\right)} \qquad (2)$$

Analog, intervalul de timp după care fasciculul care se propagă prin fibra optică, în sensul invers acelor de ceasornic revine prima dată în P se determină din relația

$$t^{-} = \frac{2\pi R - R\Omega t^{-}}{c'} \qquad (3)$$

şi se obține

$$t^{-} = \frac{2\pi R}{c'\left(1 + \frac{R\Omega}{c'}\right)} \qquad (4)$$

Astfel intervalului de timp $\Delta t = t^{+} - t^{-}$ se exprimă prin relația

$$\Delta t \cong \frac{4\pi R^2 \Omega}{(c')^2} \qquad (5)$$

în care s-a avut în vedere că $(R\Omega)^2 << c^2$

**b.** Expresia diferenței de drum optic $(\Delta L)$ dintre cele două fascicule care se propagă în sensuri opuse prin fibra optică, în condițiile precizate la punctul a este

$$(\Delta L) = c'\Delta t \cong \frac{4\pi R^2 \Omega}{c'} \qquad (6)$$

$$(\Delta L) \cong 4{,}5 \cdot 10^{-12}\ m \qquad (7)$$

**c.** Diferența de fază $\Delta\varphi$ dintre cele două fascicule de lumină, ce se propagă prin fibra optică în sensuri opuse, în situația când acestea parcurg o singură dată cadrul circular cu $N$ spire este:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi N(\Delta L)}{\lambda'} \qquad (8)$$

adică

$$\Delta\varphi = \frac{8\pi^2 \; N\Omega}{c'\lambda'} \qquad \textbf{(9)}$$

**d.** Figura 3 evidențiază rotația conturului triunghiular în sensul acelor de ceasornic cu viteza unghiulară $\Omega$.

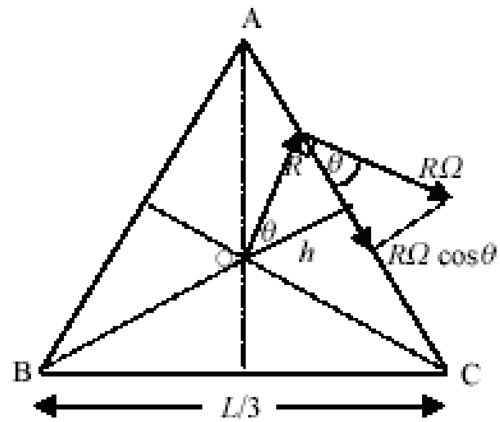


Figura 3

Componenta vitezei luminii de-a lungul laturii AC corespunzătoare propagării acesteia în sensul acelor de ceasornic ( respectiv în sens invers acelor de ceasornic) este:

$$\mathrm{v}_{\pm} = c \pm R\Omega\cos\theta = c \pm \Omega\; h \qquad \textbf{(10)}$$

Durata parcurgerii de către fasciculele laser a laturii AC în sensul acelor de ceasornic (respectiv în sens invers) este

$$\tau_{\pm} = \frac{\frac{L}{3}}{\mathrm{v}_{\pm}} \cong \frac{L}{3c}\left(1 \mp \frac{\Omega h}{c}\right) \qquad \textbf{(11)}$$

iar durata parcurgerii conturului triunghiular va fi exprimată, în cele două cazuri prin :

$$t^{\pm} = \frac{L}{\mathrm{v}_{\pm}} \cong \frac{L}{c}\left(1 \mp \frac{\Omega h}{c}\right) \qquad \textbf{(12)}$$

în care $L$ reprezintă este perimetrul conturului triunghiular

În aceste condiții, expresia pentru intervalul de timp este

$$\Delta t \cong \frac{4\Omega A}{c^2} \qquad \textbf{(13)}$$

în care prin $A$ s-a notat aria triunghiului.

**e.** Frecvențele de rezonanță asociate cu lungimile efective $L_{\pm}$ ale cavității „ văzute” de cele două fascicule laser care se propagă în sensul acelor de ceasornic, respectiv în sens invers acelor de ceasornic sunt:

$$L_{+} = c \cdot t^{+} \cong L\left(1 - \frac{\Omega h}{c}\right) \qquad \textbf{(14)}$$

$$L_{-} = c \cdot t^{-} \cong L\left(1 + \frac{\Omega h}{c}\right) \qquad \textbf{(15)}$$

astfel că

$$\Delta L = L_- - L_+ \cong 2L\frac{\Omega h}{c} \cong \frac{\Omega L^2}{\sqrt{3}\,c} \qquad (16)$$

Condiția de menținere a oscilațiilor, indicată în enunțul problemei conduce la relațiile

$$\nu_\pm = \frac{m}{L_\pm}c, \quad unde\ m = 1, 2, 3...., \qquad (17)$$

iar frecvența bătăilor se va exprima prin

$$\Delta\nu = \nu_- - \nu_+ = \frac{m}{L_-}c - \frac{m}{L_+}c \qquad (18)$$

Utilizând aproximația $L_- \cdot L_+ \approx L^2$ se obține

$$\Delta\nu \cong mc\frac{\Delta L}{L^2} \cong \nu\frac{\Delta L}{L} \qquad (19)$$

Ținând cont de relația (16) se obține

$$\Delta\nu \cong \frac{4A}{Lc}\nu\Omega \cong \frac{4A}{L\lambda}\Omega \qquad (20)$$

sau

$$\Delta\nu \cong \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L\Omega}{\lambda} \qquad (21)$$

Observație:
*Relația (20) exprimă formula lui Sagnac pentru rezonatori activi. La modul general această relație se exprimă prin*

$$\Delta\nu \cong \frac{4A}{P\lambda}\vec{n}\cdot\vec{\Omega} \qquad (22)$$

*unde A= aria delimitată de conturul parcurs de fasciculul laser*
*P= perimetrul ( lungimea totală a traiectoriei fasciculului laser)*
*$\lambda$ = lungimea de undă a radiației laser*
*$\vec{n}$ = vector normal pe suprafața de arie A*
*$\vec{\Omega}$ = vectorul viteză unghiulară*