

Rezolvare problema de termodinamica baraj
20 Aprilie 2006

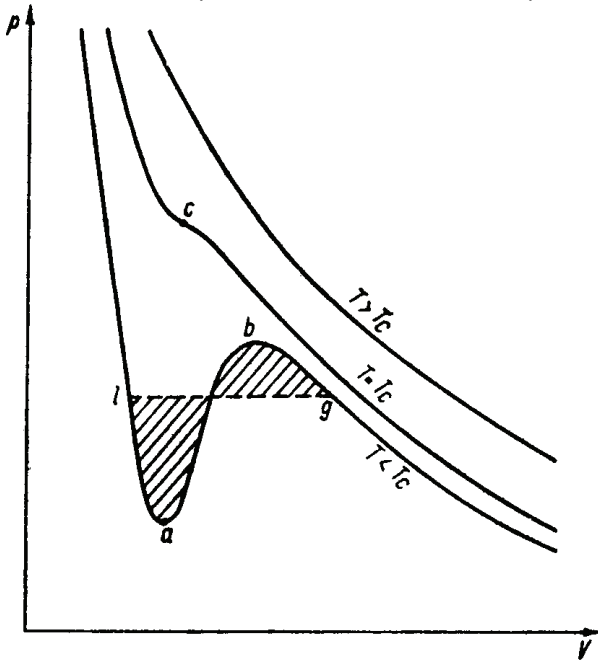
a) Inlocuind $v = \frac{1}{n}$ in ecuatia (1) din enunt se obtine:

$$(p + an^2) \left(\frac{1}{n} - b \right) = kT$$

sau

$$p(n, T) = \frac{nkT}{1 - nb} - an^2$$

Graficul cerut (obtinut evident calitativ) este cel din figura.



b) Explicatii conform manualelor sau

cartilor de specialitate. De exemplu:

La temperaturi foarte mari si densitati foarte mici, presiunea variaza liniar cu densitatea.

La densitati mari fortele de respingere determina o marire a presiunii gazului real fata de cea a gazului perfect si prin urmare exista abateri de la legea liniara a gazului perfect.

Pentru un domeniu foarte mic de valori ale temperaturii si densitatii fortele de atractie pot produce o micșorare brusca a presiunii ceea ce explica existenta unei portiuni liniare a curbei $p = p(n, T = const)$. Pe acest palier densitatea variaza intre n_g si n_l .

Pentru tranzitia lichid-solid nu se pune problema unei temperaturi critice.

c) In punctul critic (punct de inflexiune) derivatele de ordinul unu si doi sunt nule:

$$\left(\frac{\partial p(n, T)}{\partial n} \right)_{T=T_c} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p(n, T)}{\partial n^2} \right)_{T=T_c} = 0$$

d) Derivand () in raport cu n si tinand cont de () se obtin valorile cerute:

$$p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad n_c = \frac{1}{3b}, \quad T_c = \frac{8a}{27bk}$$

e) Logaritmand $f(\varepsilon)$ dat in text se obtine la limita verificarea ceruta.

f) Se inlocuiesc in () expresiile din enunt si se obtine usor:

$$\tilde{p}(\tilde{n}, \tilde{T}) = \frac{8\tilde{n}\tilde{T}}{3-\tilde{n}} - 3\tilde{n}^2$$

Se observa ca ecuatia () nu contine constante caracteristice sistemului fizic si este valabila pentru orice gaz de tip van der Waals; aceasta ecuatie se mai numeste legea starilor corespondente.

g) Inlocuind corespunzator expresiile din enunt in ecuatia starilor corespondente se obtine:

$$P(r, \varepsilon) = \frac{-3r^3 + 8\varepsilon(r+1)^2}{2\left(1 + \frac{7r}{2} + 4r^2 + \frac{3r^3}{2}\right)}$$

In cazul izotermei critice evident $\varepsilon = 0$ iar $r \ll 1$ si avem:

$$P(r) \approx \frac{-3r^3}{2} \left(1 - \frac{7r}{2} + \dots\right)$$

h) In vecinatatea punctului critic putem dezvolta in serie derivata in jurul valorilor critice V_c si T_c ; vom tine cont de asemenea ca derivata trebuie sa fie negativa conform graficului reprezentat la punctul a) si in plus in punctul critic derivatele de ordinul un si doi sunt nule conform conditiilor deduse la punctul c). Prin urmare primii termeni importanti sunt:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \approx -\lambda(V-V_c)^2 - \theta(T-T_c), \quad \lambda > 0, \quad \theta > 0$$

i) Conform conditiei Maxwell ariile hasurate din figura de la punctul a) trebuie sa fie egale. Aceasta conditie permite utilizarea ecuatiei van der Waals pentru descrierea corecta a lichefierii gazului. Portiunile cu maxim si minim din grafic sunt inlocuite cu un segment orizontal care sa asigure egalitatea ariilor mentionate. Prin urmare

$$\int_l^g V dp = \int_l^g (V - V_c) dp = \int_l^g (V - V_c) \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV = 0$$

Aceasta este posibil pentru ca $\int_l^g V_c dp = 0$. Inlocuind in () dezvoltarea () obtinem:

$$\int_l^g (V - V_c) \left[-\lambda(V - V_c)^2 - \theta(T - T_c)\right] dV = 0$$

Dupa integrare se obtine

$$-\lambda \left[\frac{(V_g - V_c)^4}{4} - \frac{(V_l - V_c)^4}{4} \right] - \theta(T - T_c) \left[\frac{(V_g - V_c)^2}{2} - \frac{(V_l - V_c)^2}{2} \right] \equiv 0$$

si de aici rezulta clar ca

$$V_g - V_c = -(V_l - V_c)$$

deoarece $V_g > V_c$ si $V_l < V_c$ conform figurii de la punctul a).

j) Evident $\int_l^g dp = 0$. Introducem in expresia precedenta dezvoltarea () si
obtinem:

$$\int_l^g dp = \int_l^g \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV = \int_l^g \left[-\lambda(V - V_c)^2 - \theta(T - T_c) \right] dV = 0$$

Integrand relatia precedenta, tinand cont de () si de definitia lui ε din enunt
obtinem relatia ceruta.