Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Fizică

Iaşi, 20-25 martie 2005

BARAJ FIZICA

PROBLEMA DE MECANICA

REZOLVARE

a) Dupa un timp t, cand elongatia caruciorului este $\vec{x}$, iar deplasarile capetelor laterale ale celor oua cbluri sunt egale, $\Delta L = vt$, modulele celor doua forte elastice care actioneaza asupra caruciorului, sunt:

$$F_{e1} = k(\Delta L - x); F_{e2} = k(\Delta L + x) > F_{e1},$$

orientarile lor fiind opuse, astfel incat reultanta lor va fi:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{e2} = -2k\vec{x},$$

evidentiind miscarea oscilatori armonica a caruciorului, echivalenta cu miscarea oscilatorie armonica a aceluiasi carucior conectat cu un singur cablu elastic (care ramne liniar pe toata durta oscilatiilor), avand constnta de elasticitate $2k$:

$$\vec{F}_e = m\vec{a}; m\vec{a} = 2k\vec{x} = 0; \vec{a} + \frac{2k}{m}\vec{x} = 0;\ \ \omega^2 = \frac{2k}{m}; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}};$$

$$V = v_0 \cos \omega t; x = x_{\max} \sin \omega t; v_0 = \omega x_{\max}; x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t;\ a = -a_{\max} \sin \omega t = -v_0 \omega \sin \omega t\ .$$

b) In raport cu un sistem de referinta mobil, care se deplaseaza constnta $\vec{v}/2$, capetele lateral ale cblurilor se deplaseaza uniform, [n sensuri opuse, departndu-se cu viteze egale, v/2, iar la momentul initial viteza caruciorului, cu modulul v/2, esye orientata spre stanga.

Concluzie: in noile conditii, evolutia sistemului rapoertata la sistemul mobil, este identic cu evolutia istemului analizat anterior.

Datorita orientarii vitezei sale initiale in raport cu sistemul mobil, la un moment ulterior, t, caruiorul se va afla in punctul de coordonata $x < 0$, cand deplasarile capetelor lateral ale cablurilor sunt egale, $\Delta L = vt/2,$ astfel incat modulele fortelor elastic care actioneaza asupra caruciorului sunt:

$$F_{e1} = k(\Delta L - x); F_{e2} = k(\Delta L + x) < F_{e1},$$

rezultanta lor avand modulul:

$$F_e = F_{e1} - F_{e2} = -2kx > 0,$$

orientarea s fiind spre dreapta, ceea ce justifica miscarea relativa oscilatorie armonica a caruciorului, pentru care avem:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}; x = -x_{\max} \sin \omega t = -\frac{v}{2\omega} \sin \omega t.$$

In aceste conditii, alungirile efective (abolute) instntanee ale celor doua cabluri, sunt:

$$\Delta l_1 = \Delta L - x = \frac{v}{2} t + \frac{v}{2\omega} \sin \omega t;$$

$$\Delta l_2 = \Delta L + x = \frac{v}{2} t - \frac{v}{2\omega} \sin \omega t,$$

relatia intre Δl_1 si Δl_2 depinzand de momentul t al evolutiei sistemului.

Observatie: alungirile Δl_1 si Δl_2 au aceleasi valori in raport cu ambele sisteme de referinta.

Fiind cunoscuta variatia semnului functiei $\sin \omega t$, rezulta:

- in semiperioadele impare, cand $\sin \omega t > 0,$ cablul 1 este mai intins dect cblul 2;

$$\Delta l_1 > \Delta l_2; 2n\frac{T}{2} < t < (2n+1)\frac{T}{2}; n = 0,1,2,....;$$

- in semiperioadele pare, cand $\sin \omega t < 0$, cablul 2 este mai intins decat cablul 1;

$$\Delta l_2 > \Delta l_2; (2n+1)\frac{T}{2} < t < (2n+2)\frac{T}{2}; n = 0,1,2,.......$$

Alungirile absolute ale celor doua cabluri depind de v (directa proportionalitate), de momentul *t* din evolutia istemului (proportionalitate) si de aoartennta lui *t* la o semiperioada para sau impara a oscilatiilor.

Cumuland toate aceste dependente, putem afirma ca se va rupe acel cablu pentru care se indeplineste mai repede conditia critica: $\Delta l = \Delta l_{crt}$.

Daca cel rupt va fi cablul 1, atunci evenimentul s-a petrecut intr-un moment apartinand unei semiperioade impare si reciproc.

Intr-adevar, corespunzator acestor semiperioade, avem:

$$2n\frac{T}{2}\frac{v}{2} < \Delta L < (2n+1)\frac{T}{2}\frac{v}{2};$$

$$\Delta L = \Delta l_{crt} - \frac{v}{2\omega} \sin \omega t > 0;$$

$$2\text{n}\frac{T}{2}\frac{v}{2} < \Delta l_{cr} - \frac{v}{2\omega} \sin \omega t < (2n+1)\frac{T}{2}\frac{v}{2};$$

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi v}{2\xi \Delta l_{cr}} < \frac{1}{2n};$$

$$n = 1; \frac{2\omega \Delta l_{cr}}{\pi} < v < \frac{1}{2}\frac{2\omega \Delta l_{cr}}{\pi};$$

$$n = 2; \frac{1}{5}\frac{2\omega \Delta l_{cr}}{\pi} < v < \frac{1}{4}\frac{2\omega \Delta l_{cr}}{\pi}.$$

Daca se va rupe cblul 2, atunci evenimentul s-a petrecut intr-un moment apartinand unei semiperioade pare si reciproc.

Intr-adevar, corespunztor semiperioadlor pare, avem:

$$(2n+1)\frac{T}{2}\frac{v}{2} < \Delta L < (2n+2)\frac{T}{2}\frac{v}{2};$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_{cr};\ \ \Delta L = \Delta l_{cr} + \frac{v}{2\omega} s\omega t; \sin \omega t < 0;$$

$$(2n+1)\frac{T}{2}\frac{v}{2} < \Delta l_{cr} < (2n+2)\frac{T}{2}\frac{v}{2};$$

$$n = 1; \frac{1}{4}\frac{2\omega\Delta l_{cr}}{\pi} < v < \frac{1}{3}\frac{2\omega\Delta l_{cr}}{\pi};$$

$$n = 2; \frac{1}{6}\frac{2\omega\Delta l_{cr}}{\pi} < v < \frac{1}{5}\frac{2\omega\Delta l_{cr}}{\pi}.$$

Pentru valori mari ale vitezei cu care se deplaseza omul, conditia critica est indeplinita de cablul 1 chiar din prim semiperioada, astfel incat, daca:

$$v > \frac{2\omega\Delta l_{cr}}{\pi},$$

se va rupe cablul 1.

c) In momentul liniarizarii orizontale a cablului, tensiunea din el este nula (cablul nu est deformat), iar viteza relativa a vgonetului fata de om este $-\vec{v}_0$.

Din acest moment, miscarea vagonetului raportata la sistemul de referinta solidar cu omul este o miscare oscilatorie armonica, debutul sau insemnand trecerea oscilatorului (vagonetului) prin pozitia de echilibru cu viteza $-\vec{v}_0$, departandu-se de originea sistemului de referinta ales (omul).

Caracterul miscarii vagonetului fata de om se va mentine pana in momentul in care vagonetul va reveni in aceeasi pozitie fata de om, dar cu viteza relativa $\vec{v}_0$, cablul fiind din nou ne deformat.

Corespunzator acestui moment, viteza vagonetului fata de sol va fi $2\vec{v}_0$ si va ramane asa deoarece cablul nu se va putea comprima, el asternandu-se si tarandu-se pe sol, fiind tras de carucior.

In aceste conditii, vagonetul il va prinde din urma pe om, il va izbi din spate si il va prelua, astfel inat, in acord cu legea conservatrii impulsului, avem:

$$2\vec{v}_0 M + m\vec{v}_0 = (M+m)\vec{u};$$

$$(2M+m)v_0 = (M+m)u;$$

$$\frac{M}{m} = \frac{u - v_0}{2v_0 - u},$$

unde M – masa vagonetului si m – masa omului.

Durata actiunii omului asupra vagonetului este egala cu durata miscarii oscilatorii armonice pe care vagonetul o efectueaza in raport cu omul, adica:

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{M}{k}},$$

adica timpul cat cablul de legatura a stt tensionat est jumatate din perioada oscilatiilor armonice pe care le-ar efectua vagonetul cand cablul, inlocuit cu un resort elastic, ar putea ramane orizontal liniar.

Corespunzator unui moment, cand, in raport cu sistemul de referinta atasat omului, vagonetul se departeaza si de om si d pozitia sa de echilibru, viteza vagonetului in raport cu solul este:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_0 + \vec{v};$$

$$v_s = v_0 - v = v_0(1 - \cos \omega t),$$

astfl incat, in acest moment, energia mecanica totala a sistemului vagonet-cablu, este:

$$E = \frac{Mv_s^2}{2} + \frac{kx^2}{2};$$

$$E = \frac{Mv_0^2}{2}(1 - \cos \omega t)^2 + \frac{kv_0^2}{2}\sin^2 \omega t;$$

Ca urmare, lucrul mecanic efectuat de om pentru deplasarea vagonetului in timpul $t = \tau / 4$, cronometrat din momentul tensionarii cablului, este:

$$L = E = Mv_0^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$