Soluție:

a) Se pornește de la observația că, pentru o sarcină punctiformă, câmpul are simetrie sferică și de la proprietatea că liniile de câmp electric nu se intersectează în punctele în care nu există sarcini electrice. De asemenea, trebuie observat că în sisteme de sarcini punctiforme, câmpul fiecărei sarcini își păstrează simetria sferică în imediata apropiere a sarcinilor, unde câmpul creat de către celelalte sarcini este neglijabil (se știe că atunci când distanța dintre sarcini tinde la zero, câmpul sarcinii punctiforme tinde la infinit). Aceste observații, împreună cu teorema lui Gauss, ne conduc la proprietatea că putem exprima fluxul printr-o suprafață Σ care se vede din sarcina punctiformă Q sub un unghi solid Ω sub forma (vezi figura):

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega}{4\pi}$$

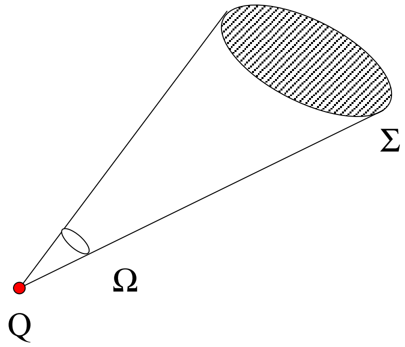


Fig. 1 Fluxul prin suprafața Σ

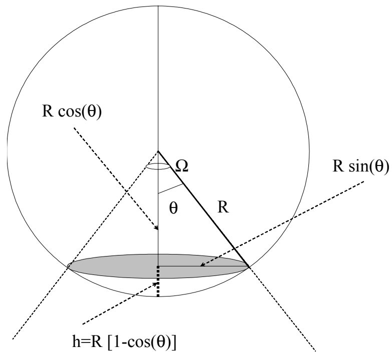


Fig.2 Unghiul solid al unui con având semi-unghiul la vârf θ

Un alt rezultat de care avem nevoie în calcul este unghiul solid al deschiderii unui con având semi-unghiul la vârf θ, și anume:

$$\Omega = 2\pi\left(1-\cos\theta\right).$$

În condițiile enunțate anterior, putem afirma că TOATE liniile de câmp care pornesc din A sub un unghi $\theta \ge \theta_{a0}$ ajung în punctul B sub un unghi $\theta \le \theta_{b0}$. Egalând fluxurile:

$$\Phi_A = \frac{|q_a|}{\varepsilon_0}\frac{2\pi\left[1-\cos\left(\pi-\theta_{a0}\right)\right]}{4\pi}$$

și

$$\Phi_B = \frac{|q_b|}{\varepsilon_0}\frac{2\pi\left[1-\cos\left(\theta_{b0}\right)\right]}{4\pi}$$

și făcând simplificări, obținem:

$$|q_a|\left[1-\cos\left(\pi-\theta_{a0}\right)\right] = |q_b|\left[1-\cos\left(\theta_{b0}\right)\right] \Rightarrow \cos\left(\theta_{b0}\right) = 1-\left|\frac{q_a}{q_b}\right|\left(1+\cos\left(\theta_{a0}\right)\right)$$

sau, dacă notăm cu

$$\alpha = \left|\frac{q_a}{q_b}\right| = -\frac{q_a}{q_b}$$

obținem:

$$\cos\left(\theta_{b0}\right) = 1-\alpha\left(1+\cos\left(\theta_{a0}\right)\right). \qquad (1)$$

b) Din relația (1), pentru a putea obține o valoare pentru unghiul θ_{b0} trebuie să impunem ca membrul drept din (1) să fie cuprins în intervalul $[-1,+1]$, adică:

$$-1 \le \left[1-\alpha\left(1+\cos\left(\theta_{a0}\right)\right)\right] \le 1,$$

ceea ce indică posibilitatea ca doar pentru anumite valori ale unghiului θ_{a0} liniile de câmp care pornesc din A ajung în B. Să analizăm restricțiile introduse de condiția anterioară pentru θ_{a0}.

Din:

$$\left[1-\alpha\left(1+\cos\left(\theta_{a0}\right)\right)\right] \le 1$$

rezultă succesiv:

$$-\alpha\left(1+\cos\left(\theta_{a0}\right)\right) \le 0 \Rightarrow \cos\left(\theta_{a0}\right) \ge -1.$$

condiție valabilă pentru orice unghi θ_{a0}.

Din

$$-1 \le \left[1-\alpha\left(1+\cos\left(\theta_{a0}\right)\right)\right]$$

rezultă succesiv:

$$-2 \le -\alpha\left(1+\cos\left(\theta_{a0}\right)\right) \Rightarrow 2 \ge \alpha\left(1+\cos\left(\theta_{a0}\right)\right) \Rightarrow 1+\cos\left(\theta_{a0}\right) \le \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \cos\left(\theta_{a0}\right) \le \frac{2}{\alpha}-1$$

condiție care trebuie analizată pentru $\alpha \in [0,1)$ şi $\alpha \ge 1$, respectiv.

Dacă $\alpha \in [0,1)$, atunci $\frac{2}{\alpha} > 2$ şi condiția care rezultă pentru θ_{a0} este banală, adică,

$$\cos\left(\theta_{a0}\right) < 1.$$

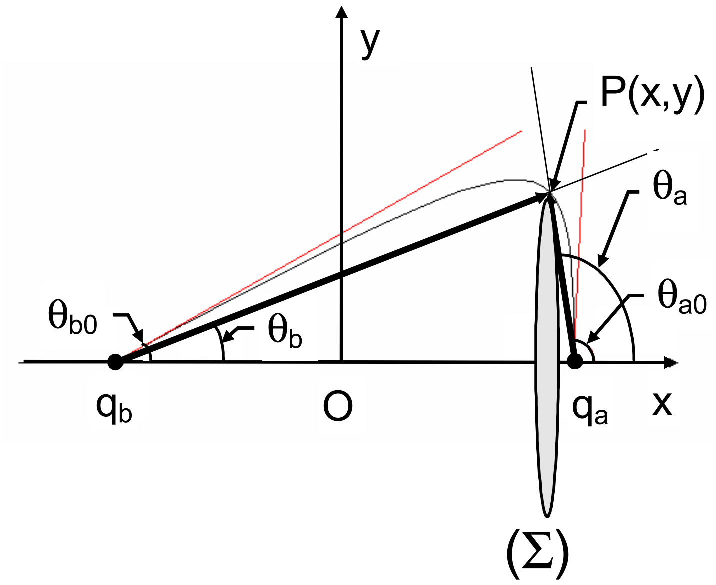
Dacă însă $\alpha \ge 1$, parametrul $\xi = \frac{2}{\alpha} - 1$ poate lua valori în intervalul $[-1,1]$, ceea ce indică pentru fiecare valoare a lui α o restricție de forma:

$$\cos\left(\theta_{a0}\right) \le \xi \Rightarrow \theta_{a0} \ge \theta_{al} = \arccos\left(\xi\right) = \arccos\left(\frac{2}{\alpha}-1\right).$$

Discuția din ultimele paragrafe are ca bază fizică faptul că atunci când $\alpha \in [0,1)$ (adică sarcina q_a este în modul mai mică decât sarcina q_b) toate liniile de câmp care pleacă din A se închid pe B, adică $\theta_{al} = 0$.

Dacă însă sarcina q_a este în modul mai mare decât sarcina q_b atunci doar o parte dintre liniile de câmp care pleacă din A ajung în B, adică cele care pleacă din A sub un unghi mai mare decât $\theta_{al} = \arccos\left(\xi\right) = \arccos\left(\frac{2}{\alpha}-1\right)$.

c)



Pentru a determina ecuația liniilor de câmp pornim de la observația făcută şi la punctul a) privind faptul că toate liniile de câmp care pornesc din A sub un unghi $\theta \geq \theta_{a0}$ ajung în punctul B sub un unghi $\theta \leq \theta_{b0}$. Se consideră un punct P oarecare pe linia de câmp care porneşte din A sub unghiul θ_{a0}. Ținând cont de simetria axială a problemei putem roti linia de câmp în jurul axei Ox şi obținem o suprafață formată din linii de câmp similare celei menționate. Se intersectează această suprafață cu un plan perpendicular pe axa Ox, care trece prin punctul P. Intersecția planului cu suprafața este un disc. Indiferent de poziția punctului P pe linia de câmp fluxul prin discul care trece prin P va fi acelaşi. Folosim această proprietate pentru a găsi ecuația liniei de câmp.

Fluxul prin disc îl putem calcula folosind principiul superpoziției, ca fiind suma algebrică (ținând cont de sensul liniilor de câmp şi considerând că normala la suprafața discului este în sensul axei Ox) a fluxurilor create de fiecare dintre cele două sarcini:

$$\Phi = -\frac{q_a}{\varepsilon_0}\frac{2\pi\left(1-\cos\left(\pi-\theta_a\right)\right)}{4\pi} + \frac{q_b}{\varepsilon_0}\frac{2\pi\left(1-\cos\left(\theta_b\right)\right)}{4\pi}.$$

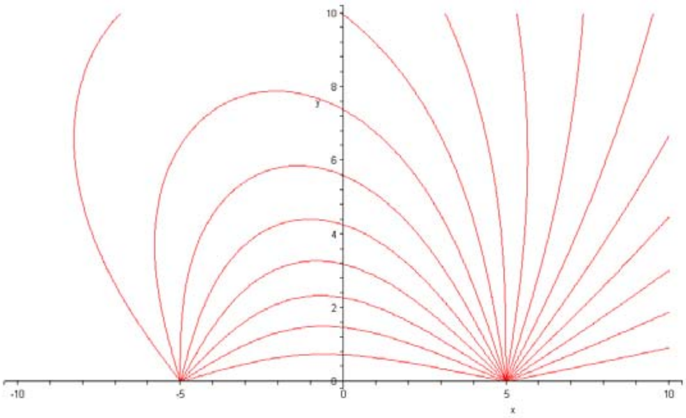
Din condiția de flux constant se obține imediat ecuația liniei de câmp sub forma:

$$q_a \cos\left(\theta_a\right) + q_b \cos\left(\theta_b\right) = \text{const.}$$

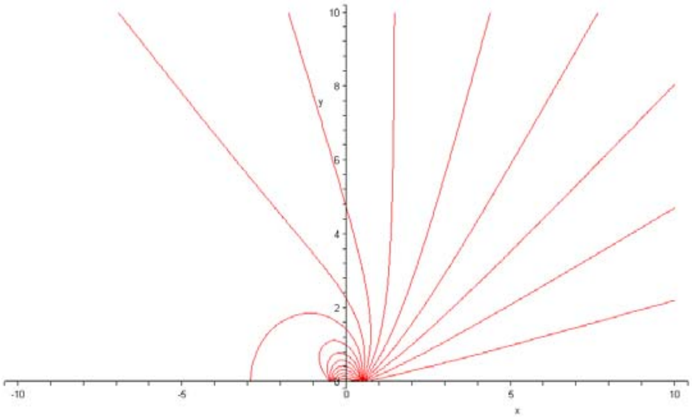
sau exprimat în coordonate carteziene:

$$q_a \frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + y^2}} + q_b \frac{\left(x+\frac{d}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2 + y^2}} = \text{const.}$$

e)



Aproape de sistem



Departe de sistem

Unghiul limită este:

$$\alpha = 2;\ \theta_{al} = \arccos\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Liniile de câmp care nu se închid pe sarcina din punctul B se închid la infinit. Aceste linii de câmp tind asimptotic la liniile unei sarcini punctiforme $q_t = q_a + q_b = -2q_b + q_b = -q_b$. Vezi figurile.