Subiectul 1. MECANICĂ

A. O particulă de masă m se deplasează într-un câmp central caracterizat de o energie potențială de forma $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, α fiind o constantă pozitivă.

1. Să se determine forța care acționează asupra particulei;
2. Să se arate că , în acest câmp, mărimea vectorială $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$ se conservă. Mărimile care intervin au următoarele semnificații: $\vec{r}$ este raza vectoare a particulei, $\vec{v}$ este viteza sa iar $\vec{L}$ este momentul sau cinetic.
3. Să se stabilească legătura dintre modulul vectorului $\vec{A}$ (cunoscut sub denumirea de vector Laplace-Runge-Lenz) şi energia totală E a particulei.
4. Să se arate că traiectoria particulei se poate scrie sub forma $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$, unde $p = \frac{L^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$,iar φ este unghiul dintre vectorul fix $\vec{A}$ şi vectorul de poziție $\vec{r}$

©Lector dr. Marian Negrea

B. O particulă punctiformă, cu sarcina electrică $q > 0$ şi masa m , se află inițial în repaus într-un loc specificat de vectorul de poziție $\vec{r}_0\,(a,0,0)$ față de un punct fix O – originea coordonatelor carteziene. Particula este plasată într-un câmp magnetic uniform şi constant $\vec{B}(0,0,B)$, cu direcția perpendiculară pe $\vec{r}_0$, asupra ei acționând permanent o forță elastică $\vec{F} = -k\vec{r}$, unde $\vec{r}$ este raportat față de acelaşi punct fix O, iar k este o constantă pozitivă .

1.Să se arate că legea mişcării are forma:

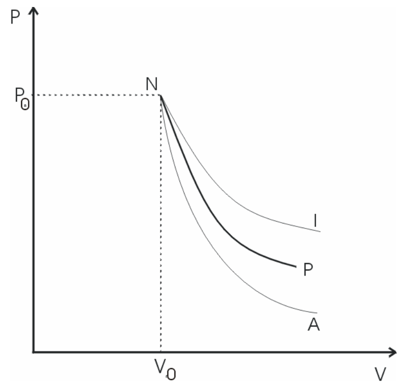
$$\chi(t) = \exp(-i\omega t)\left[a\cos(t\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}) + \frac{ia\omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}}\sin(t\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2})\right]$$

unde $\chi(t) = x(t) + iy(t)$, $x(t)$ si $y(t)$ fiind componente ale razei vectoare. In expresia precedentă au fost utilizate următoarele notații: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ şi $\omega = \frac{qB}{2m}$.

2.Să se discute calitativ traiectoria particulei.

©Lector dr. Valentin Hărăbor

Subiectul 2. TERMODINAMICĂ



Fie $N(V_0,p_0)$ punctul de intersecție al unei izoterme cu o adiabată, trasate ambele pentru aceeaşi cantitate de gaz perfect. Se cunoaşte indicele adiabatic $\gamma = C_p/C_v$.

a) Să se determine expresia analitică a tangentei unghiului dintre tangentele duse la izotermă şi la adiabată în punctul N.

b) Să se demonstreze că, pentru procesul politrop NP (parcurs de aceeaşi cantitate de gaz perfect), căldura molară se poate scrie sub forma $C=C_V[\,\Delta(\ln K)/\,\Delta(\ln T)]$, unde K este constanta adiabatei Poisson iar T este temperatura absolută. Prin Δ se înțelege variația mărimii conținute în paranteza rotundă care îi urmează.

c) Folosind rezultatul punctului b), să se stabilească semnul căldurii molare în procesul NP.

d) Se transcriu ecuațiile proceselor izoterm, adiabatic şi politrop în variabilele adimensionale $\pi \equiv p/p_0$ şi $v \equiv V/V_0$, astfel că punctul N este caracterizat prin valorile $\pi_N=1$, $v_N=1$. Să se determine indicele politropic $n=(C-C_p)/(C-C_v)$ asftfel încât, în planul (v, π), în punctul (1,1), tangenta la politropă să fie bisectoarea unghiului dintre tangentele la izotermă şi la adiabată.

©Prof. univ. dr. Florea Uliu

Subiectul 3. ELECTRICITATE

Un tor de raze R = 20 cm şi r = 5 cm, are secțiunea dreptunghiulară de laturi R-r şi b, (b > (R-r)). În jugul (miezul) torului, în punctele aflate la distanța R de axa de simetrie a torului (fața exterioară a torului), câmpul magnetic are inducția B_0 = 1 T. Din tor se scoate un sector foarte îngust astfel încât intensitatea şi distribuția câmpului magnetic să fie aceeaşi în interfier şi în jug. Torul este dispus cu sectorul extras în plan vertical şi având axa de simetrie orizontală .

De două fire elastice, conductoare, de masă neglijabilă, de lungime l_0 = 50 cm şi de constantă elastică K = 1N/m, este suspendată o bară metalică de masă m = 10 g şi lungime L = 0,5 m; bara este aşezată deasupra tăieturii din tor, în care pătrunde foarte puțin. Prin bară este trecut un curent electric care creşte foarte lent şi care determină o atragere a barei în interiorul interfierului torului. Bara nu atinge pereții tăieturii practicate în tor şi se neglijează curbarea firelor elastice datorită câmpului magnetic. Pentru o anumită valoare a curentului electric trecut prin bară, aceasta începe să se mişte brusc în jos. Determinați valoarea acestui curent şi poziția barei, fata de punctele de suspensie ale firelor, când începe mişcarea "explozivă ". Cât ar trebui să fie constanta elestică a firelor de suspensie, pentru ca mişcarea explozivă să înceapă în cel mai de jos punct al interfierului.

©Prof. univ. dr. Ştefan Antohe, Conf.univ.dr. Adrian S.Dafinei

Subiectul 4. FIZICĂ ATOMICĂ ŞI NUCLEARĂ

A. O piesă metalică este alcătuită dintr-un aliaj de fier şi cobalt. In urma unor tratamente termice poate apărea o segregare a celor două elemente, cu efecte dăunătoare asupra proprietăților mecanice ale piesei. Pentru a determina, cel putin calitativ, gradul de segregare, se poate face o radiografiere cu raze X.Intre ce limite ar trebui să se afle energia razelor X pentru a distinge între ele zonele mai bogate in fier de cele mai bogate în cobalt. Se poate folosi faptul că potențialul de ionizare a manganului de pe pătura K este 5,6 kV, iar factorul de ecranare $\sigma \approx 1$. Se dau: $Z_{Mn}=25$, $Z_{Fe}=26$, $Z_{Co}=27$

©Conf.univ.dr. Andrei Ionescu

B. Determinarea experimentala a energiei radiațiilor α poate fi făcută si calorimetric. In acest caz, o masa m dintr-un radionuclid α-activ este introdusa intr-un calorimetru având capacitatea calorica C_c. Intr-un interval de timp egal cu $0{,}1\cdot T$ (T fiind timpul de înjumătățire al radionuclidului considerat), temperatura din calorimetru creste cu $\Delta\theta$ K. Stiind ca radionuclidul investigat are capacitatea calorica c_A si ca in timpul măsurărilor capacitatea calorică a probei poate fi considerată constantă, să se calculeze energia radiațiilor α emise de probă, acestea având spectrul monoenergetic.

Se poate utiliza aproximația $e^{-x} = 1 - x$

©Prof. univ. dr. Octavian Duliu

***Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare subiect se acordă notă de la 10 la 1. Timp de lucru: 4 ore*
Problemele vor fi tratate pe foi distincte

BAREM PENTRU CORECTAREA SUBIECTULUI 1: MECANICA

Din oficiu .... 1 punct
A..In total 5 puncte
1. $\vec{F} = -gradU(r) = \alpha grad(1/r) = \alpha\vec{r}/r^3$ care este o forță centrală.................1 punct
2. Se arată pe baza rezultatului de la punctul 1) şi a faptului că $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, că $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ adică vectorul $\vec{A} = cons\tan t$ ....2 puncte
3. Ridicând la pătrat expresia vectorului Runge-Lenz obținem următoarea ecuație $A^2 = v^2L + \alpha^2 - 2\alpha L^2/mr$ .Prelucrând corespunzător şi ținand cont de faptul că energia totală este suma dintre energia cinetică şi energia potențială obțtinem $A/\alpha = \sqrt{1 + 2EL^2/m\alpha^2}$ ....1 punct
4. Înmulțind scalar expresia vectorului Runge-Lenz cu vectorul de poziție şi ținând cont de rezultatul de la punctul precedent se obține rezultatul ....1 punct
B. ....In total 4 puncte
1. Principiul fundamental al dinamicii
$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} + q\vec{v}\times\vec{B}$ ....1 punct
proiectat pe axe conduce la sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} m\ddot{x} + kx - q\dot{y}B = 0 \\ m\ddot{y} + ky + q\dot{x}B = 0 \\ m\ddot{z} + kz = 0 \end{array}\right\}$$ ....0,5 puncte

Introducînd funcția complexă $\chi = x + iy$, se obține ecuația de mişcare în planul xOy cu soluția generală

$$\chi(t) = \exp(-i\omega t)\left[C_1 \exp\left(it\sqrt{\omega_0^2 + \omega}\right) + C_2 \exp\left(it\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}\right)\right]$$

Constantele de integrare se determină din condițiile inițiale şi se obține soluția dată în enunț...1 punct
2. Factorul exponentialei din solutie reprezinta compunerea a doua oscilatii perpendiculare cu amplitudinile a si $\frac{\omega a}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}}$ cu aceeasi pulsatie $\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}$ care au loc intr-un plan care se roteste in jurul lui Oz fata de planul xOy, traiectoria este atunci o elipsa cu semiaxele egale cu cele doua amplitudini..1 punct
Planul in care traiectoria este elipsa se roteste in jurul axei Oz cu viteza unghiulara ω in sens orar, obtinindu-se prin compunere o rozeta limitata de cercurile cu razele egale cu semiaxele elipsei...0,5 puncte

BAREM PENTRU CORECTAREA SUBIECTULUI 2:TERMODINAMICA

Din oficiu.. 1 punct

a.Expresiile pentru tangentele unghiurilor cu axa OV a tangentelor in N cu izoterma si adiabata,observatia ca diferenta acestor unghiuri este unghiul cautat si expresia finala a tangentei acestui unghi $tg\alpha = (\gamma - 1)(p_0 / V_0)\left[1 + \gamma (p_0 / V_0)^2\right]^{-1}$ ....1,5 puncte

b. Expresia diferentiala a principiului I, definitia procesului politrop si expresia diferentiala a legii gazelor perfecte, ne conduc la rezultatul cerut in enunt.......3 puncte.

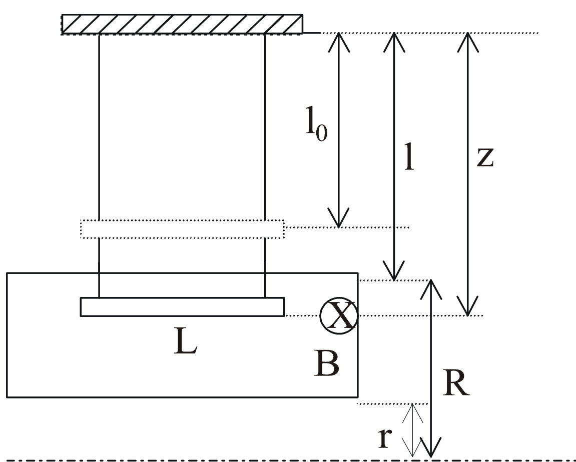
c. In procesul NP la numaratorul expresiei lui C avem o cantitate pozitiva deoarece se trece spre o adiabata superioara. In schimb la numitorul aceleiasi expresii avem o cantitate negativa, deoarece se trece pe o izoterma inferioara. In consecinta C este o cantitate negativa...2 puncte.

d. Prin trecerea la variabilele adimensionale constatam ca tangenta la politropa este bisectoarea unghiului format de tangentele la izoterma si adiabata daca este satisfacuta ecuatia $n^2 - 2n\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - 1 = 0$ cu solutia $n = \frac{\gamma - 1 + \sqrt{2\gamma^2 + 2}}{\gamma + 1}$.Pentru $\gamma = 5/3$ gasim ca $n = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} = 1{,}281$ ....2,5 puncte

Total general...10 puncte

REZOLVARE PENTRU PROBLEMA 3 ELECTRICITATE

Barem corectura - Problema de electricitate.



Inainte de stabilirea curentului prin bara:

$mg = 2K(l - l_0) \Rightarrow l - l_0 = 5cm$ (1)

La o valoare I a intensitatii curentului prin bara conditia de echilibru este:

$2K(z - l_0) = mg + BIL$ (2)

Inductia campului magnetic in intrefier la distanta z de punctele de suspensie ale firelor este:

$$B = \frac{R}{R + l - z} B_0 \qquad (3)$$

Tinand seama de ecuatiile 1 si 3 ecatia 2 devine:

$\frac{mg}{l - l_0}(z - l_0) = mg + \frac{RB_0 L}{R + l - z} I$ sau

$$\frac{mg}{RB_0 L(l - l_0)}(z - l) = \frac{I}{R + l - z} \qquad (4)$$

Notand: $z - l = x$ si introducand datele numerice se obtine ecuatia:

$$I = -20x^2 + 20Rx \qquad (5)$$

Intensitatea curentului prin bara pentru care aceasta incepe sa se miste brusc in jos se obtine din conditia ca radacinile ecuatiei asociate sa fie confundate deci:

$$x = \frac{R}{2} = 10cm \Rightarrow z = 65cm \text{ si} \quad (6)$$

$$I = 0{,}2A \quad (7)$$

b) In conditiile de la punctul b) x=15 cm respectiv z =70 cm. Cu aceasta intensitatea curentului prin bara va fi conform ecuatiei (6) I' = 1,5 A.

In acord cu ecuatiile (1) si (4) constanta elestica este:

$$K' = \frac{IB_0RL}{2x(R-x)} = 10\frac{N}{m} \quad (8)$$

REZOLVARE PENTRU PROBLEMA 4A

Pentru a putea distinge între elemente diferite (Fe şi Co), care au însă numerele de ordine Z foarte apropiate, trebuie ca energia radiației X să fie suficientă pentru a excita o specie de atomiP de pe pătura K (de exemplu) prin efect fotoelectric intern, dar insuficientă pentru a excita cealaltă specie. In acest caz prima specie absoarbe puternic, dând o imagine radiografică mai luminoasă pe placa fotografică, în timp ce cea de a doua specie va lăsa să trecă o cantitate mai mare de radiații care vor înnegri mai mult placa.

Energiile electronilor de pe pătura K se exprimă prin formula

$$E = -(Z-1)^2 R,$$

unde R este constanta Rydberg.

$$E_{Fe} = -(Z_{Fe}-1)^2 R$$

Energia razelor X trebuie sa fie mai mare decât $|E_{Fe}|$ şi mai mică decât $|E_{Co}|$.

$$E_{Co} = -(Z_{Co}-1)^2 R$$

$$|E_{Co}| > |E_{Fe}|$$

Tinând cont că

$$E_{Mn} = -(Z_{Mn}-1)^2 R,$$

energia $h\nu_X$ trebuie să fie cuprinsă in domeniul

$$\left(\frac{25}{24}\right)^2 * 5{,}6\,keV < h\nu_X < \left(\frac{26}{24}\right)^2 * 5{,}6\,keV.$$

REZOLVARE SI BAREM DE CORECTARE PENTRU PROBLEMA 4B

Determinarea experimentalã a energiei radiatiilor α poate fi fãcuta si calorimetric. In acest caz, o masã m dintr-un radionuclid α-activ este introdusã într-un calorimetru având capacitatea caloricã C_c. Intr-un interval de timp egal cu $0{,}1\cdot T$ (T fiind timpul de injumãtãtire al radionuclidului considerat), temperatura din calorimetru creste cu $\Delta\theta$ K. Stiind cã radionuclidul investigat are cãldura specificã c_A si cã in timpul mãsuratoriilor capacitatea caloricã a probei poate fi consideratã constantã, sã se calculeze energia radiatiior α emise de probã, acestea având spectrul monoenergetic. Se va considera: $e^{-x} = 1 - x$

REZOLVARE

Radiatiile α au spectrul monoenergetic.

Ecuatia dezintegrãrii α este urmãtoarea:

$$ {}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_{2}^{4}\alpha \ + \Delta Q $$

unde ΔQ este energia degajatã ca urmare a dezintegrãrii α

Conform legii de conservare a energiei, energia degajatã ΔQ este egalã cu suma energiilor cinetice ale produsilor de dezintegrare: nucleul ${}_{Z-2}^{A-4}Y$ si particula ${}_{2}^{4}\alpha$, adicã:

$$ \Delta Q = \frac{p_Y^2}{2\,m_Y} + \frac{p_\alpha^2}{2\,m_\alpha} \qquad (1) $$

unde p_Y si p_α sunt impulsurile nucleului Y si particulei α respectiv.

Dat fiind cã energia cineticã a nucleului X este neglijabilã în raport cu ΔQ, în starea initialã (înainte de dezintegrare) acesta poate fi considerat în repaos. In acest caz, conform legii de conservare a impulsului:

$$ 0 = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha \qquad (2) $$

Astfel, ecuatia (1) devine:

$$ \Delta Q = \frac{p_\alpha^2}{2\,m_\alpha}\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}\right) \qquad (3) $$

Dar $m_\alpha \approx 4$ iar $m_Y = A - 4$

In acest econditii:

$$ \Delta Q = E_\alpha \left(1 + \frac{4}{A-4}\right) = E_\alpha \left(\frac{A}{A-4}\right) \qquad (4) $$

Unde E_α este energia particulelor α.

In calorimetru, cantitatea de energie ΔW degajatã în intervalul de timp $\Delta t = T/10$ este egalã cu produsul dintre numãrul Δn de nuclee dezintegrate în acest interval de timp si energia ΔQ eliberatã în cursul unei dezintegrãri.

Astfel,

$$ \Delta n = N_0 - N_0 e^{-\lambda \Delta t} = N_0\left(1 - e^{-\lambda \Delta t}\right) = N_0\left(1 - 1 + \lambda\ \Delta t\right) = N_0 \lambda\ \Delta t \qquad (5) $$

Dar:

$$ \lambda = \frac{\ln 2}{T} \qquad \text{si} \qquad N_0 = \frac{m}{A} N_A \qquad (6) $$

unde N_A este numãrul lui Avogadro.

In aceste conditii, cantitatea de energie degajatã ΔW devine:

$$\Delta W = \frac{m}{A} N_A \frac{\ln 2}{10} E_\alpha \left(\frac{A}{A-4} \right) \tag{7}$$

Această energie este transformată în căldură prin frânarea particulelor α si a nucleelor de recul în materialul probei. Considerând transferul de căldură fără pierderi, rezultă că:

$$(C_c + mc_A)\Delta\theta = \frac{m}{A} N_A \frac{\ln 2}{10} E_\alpha \left(\frac{A}{A-4} \right) \tag{8}$$

De unde se obtine în final:

$$E_\alpha = \frac{10}{\ln 2} \frac{A}{m} \frac{(C_c + mc_A)\Delta\theta}{N_A \left(\frac{A}{A-4} \right)} \tag{9}$$

BAREM DE CORECTARE

Din oficiu	1 punct
${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2\alpha \ + \Delta Q$	1 punct
$\Delta Q = \frac{p_Y^2}{2\,m_Y} + \frac{p_\alpha^2}{2\,m_\alpha}$	1 punct
$0 = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha$	1 punct
$\Delta Q = \frac{p_\alpha^2}{2\,m_\alpha} \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_Y} \right)$	1 punct
Dar $m_\alpha \approx 4$ iar $m_Y = A - 4$	
$\Delta Q = E_\alpha \left(1 + \frac{4}{A-4} \right) = E_\alpha \left(\frac{A}{A-4} \right)$	1 punct
$\Delta n = N_0 - N_0 e^{-\lambda \Delta t} = N_0 \left(1 - e^{-\lambda \Delta t} \right) = N_0 (1 - 1 + \lambda\ \Delta t) = N_0 \lambda\ \Delta t$	1 punct
$\Delta W = \frac{m}{A} N_A \frac{\ln 2}{10} E_\alpha \left(\frac{A}{A-4} \right)$	1 punct
$(C_c + mc_A)\Delta\theta = \frac{m}{A} N_A \frac{\ln 2}{10} E_\alpha \left(\frac{A}{A-4} \right)$	1 punct
$E_\alpha = \frac{10}{\ln 2} \frac{A}{m} \frac{(C_c + mc_A)\Delta\theta}{N_A \left(\frac{A}{A-4} \right)}$	1 punct

TOTAL 10 puncte