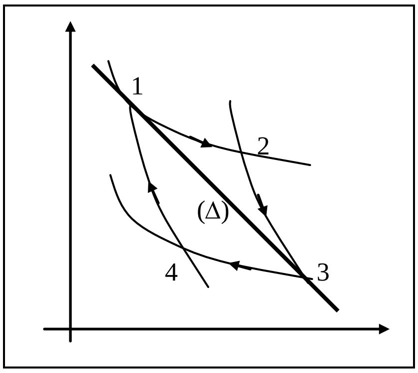
MINISTERUL EDUCATIEI NATIONALE
INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN GALATI
CONCURSUL NATIONAL EVRIKA 2000

SOLUTII CLASA A XI-A - EVRIKA

Problema 1.



Fie ecuatia dreptei (Δ): p= aV + b , unde a < 0 si b > 0.

Conform ecuatiei Mendeleev - Clapeyron

$p = \frac{\nu RT}{V}$ (***0,5 puncte***)

$\nu RT = aV^2 + bV$ (***1 punct***), functie care admite maxim pentru $V_1 = -\frac{b}{2a}$ *si* $p_1 = \frac{b}{2}$, valori care reprezinta parametrii starii 1(starea de pe dreapta in care temperatura este maxima) (***1 punct***).

Calculam acum caldura schimbata intre starea 1 si o stare M de volum V , presiune p si temperatura T, care se afla pe dreapta (Δ):

$Q_{1m} = \Delta U_{1m} + L_{1m} = \nu C_V (T - T_1) + \frac{(p + p_1)(V - V_1)}{2}$, unde am calculat L_{1M} prin aria de sub segmentul de dreapta care reprezinta transformarea in coordonate (p,V) si axa volumului (***1 punct***)

Cum $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$ (***0,5 puncte***) , unde γ este coeficientul adiabatic, rezulta:

$$Q_{1M} = \frac{1}{\gamma - 1}(\nu RT - \nu RT_1) + \frac{1}{2}(p + p_1)(V - V_1) = \frac{1}{\gamma - 1}(pV - p_1 V_1) + \frac{1}{2}(p + p_1)(V - V_1)$$

(***0,5 puncte***) . Presiunea si volumul celor doua stari 1 si M verifica ecuatia dreptei, deci:

$p_1 = aV_1 + b$ si $p = aV + b$ (***0,5 puncte***)

Inlocuind si facand calculele, obtinem:

$$Q_{1M} = \frac{a(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)} V^2 + \frac{b\gamma}{\gamma - 1} V - \frac{a(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)} V_1^2 - \frac{b\gamma}{\gamma - 1} V_1 \quad (\textbf{\textit{1 punct}})$$

Starea 3 este starea in care caldura schimbata Q_{1M} admite un maxim, deci:

$V_3 = -\frac{b\gamma}{a(\gamma + 1)}$ si inlocuind in ecuatia dreptei (Δ): $p_3 = \frac{b}{\gamma + 1}$ (***1 punct***)

Randamentul ciclului Carnot este dat de relatia $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ (***0,5 puncte***) unde T_1 si T_2 reprezinta temperaturile starilor apartinand izotermelor 1 → 2 si respectiv 3 → 4. Putem scrie:

$\eta = 1 - \frac{\nu RT_2}{\nu RT_1} = \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1}$ (***0,5 puncte***) si inlocuind : $\eta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{\gamma + 1}\right)^2$ (***1 punct***)

Problema 2

1) Fie n_1 si n_2 numarul corespunzator de elemente fiecarei grupari, astfel ca $n = n_1 + n_2$. (1)

Aplicand teorema transferului maxim de putere, avem $P = \frac{E_e^2}{4r_{ie}}$ (2)

in care E_e si r_{ie} sunt t.e.m. echivalenta si rezistenta echivalenta a bateriei (***2 puncte***).

Dar:

$$E_e = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2} = \frac{2n_1 n_2 E r}{(n_1 + n_2) r} = \frac{2n_1 n_2 E}{n_1 + n_2} \qquad (3)$$

$$r_{ie} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} r \qquad (4)$$

Substituind (3) si (4) in (2) se obtine $P = \frac{n_1 n_2 E^2}{nr}$ (5) (**2 puncte**)

Pentru a determina n_1 si n_2 se rezolva sistemul format din ecuatiile (1) si (5) de unde rezulta solutiile:

$$n_{1,2} = \frac{n}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4rP}{nE^2}}\right) \qquad (8) \qquad (\textbf{2 puncte})$$

Solutiile (8) exista daca $\frac{4rP}{nE^2} \leq 1$, adica $E^2 \geq \frac{4rP}{n}$. In aceste conditii $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$ (10)

(**2 puncte**).

Substituind valorile numerice se obtin $n_1 = 9$; $n_2 = 7$; $E_{min} = \frac{\sqrt{63}}{4}$ V ; $n_1 = n_2 = 8$ (**1 punct**)

Problema 3

Va trebui sa definim o functie y(x) in care $y = \frac{\omega}{\omega_1}$ si unde ω este pulsatia micilor oscilatii ale pendulului fizic descris in enuntul problemei, iar ω pulsatia pendulului matematic de lungime l_1. Se stie ca $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$ (**1 punct**). Asadar va tebui sa determinam ω. Pentru aceasta avem in vedere ca pendulul fizic descris in enuntul problemei (fig.1) reprezinta un sistem mecanic conservativ (fara pierderi de energie) si ca in aceasta situatie, potrivit legii conservarii energiei, energia cinetica maxima este egala cu energia potentiala maxima a sistemului

$E_{cmax} = E_{pmax}$ (2)

Asadar, presupunand ca pendulului din figura 1 i s-a imprimat un mic impuls, acesta va efectua mici oscilatii lib. Pentru deviatia unghiulara maxima θ_0 a pendulului (fig.2) , cand viteza acestuia este nula, energia potentiala maxima de natura gravitationala este :

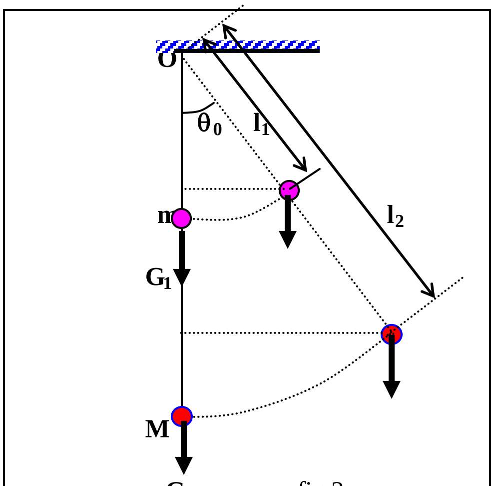


fig.2

$$E_{p\max} = mgl_1(1 - \cos\theta_0) + Mgl_2(1 - \cos\theta_0)$$

Avand in vedere ca pentru cazul micilor oscilatii

$$1 - \cos\theta_0 = 2\sin^2\frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0^2}{2} \quad ; \quad \sin\frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0}{2}$$

expresia energiei potentiale maxime se poate retranscrie sub forma

$$E_{p\max} = \frac{1}{2} g\theta_0^2 (ml_1 + Ml_2) \qquad (3) \qquad (\textbf{1 punct})$$

Energia cinetica maxima a sistemului corespunde pozitiei acestuia in care viteza sa este maxima. Aceasta pozitie corespunde trecerii prin pozitia de echilibru a pendulului si deci

$$E_{c\max} = \frac{1}{2} m v_{1\max}^2 + \frac{1}{2} M v_{2\max}^2$$

Evident, in cazul micilor oscilatii $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$, astfel ca

$$v_1 = \omega l_1 \theta_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad |v_{1\max}| = \omega l_1 \theta_0$$

$$v_2 = \omega l_2 \theta_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad |v_{2\max}| = \omega l_2 \theta_0$$

Ca urmare energia cinetica maxima a sistemului se poate transcrie sub forma

$$E_{cmx} = \frac{1}{2}\omega^2\theta_0^2(ml_1^2 + Ml_2^2) \qquad (4) \qquad \textbf{(1 punct)}$$

Avand in vedere (3) si (4) si tinand seama de (2) prin explicitarea marimii pulsatiei ω se obtine:

$$\omega = \sqrt{\frac{g(ml_1 + Ml_2)}{ml_1^2 + Ml_2^2}} \qquad (5)$$

Considerand (1) si (5), expresia functiei cautate este:

$$y = \frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{\frac{l_1(ml_1 + Ml_2)}{ml_1^2 + Ml_2^2}} \qquad (6) \qquad \textbf{(2 puncte)}$$

Avand in vedere ca $\lambda = \frac{M}{m}$ iar $x = \frac{l_2}{l_1} \in [0, \infty)$, expresia functiei y(x) definita prin (6) capata forma

$$y(x) = \sqrt{\frac{1 + \lambda x}{1 + \lambda x^2}} \qquad (7) \qquad \textbf{(1 punct)}$$

In continuare va trebui sa determinam extremele functiei y(x) definite prin (7). Extremele functiei y(x) corespund valorilor extreme ale functiei $z(x) = y^2(x)$, astfel ca

$$z(x) = \frac{1 + \lambda x}{1 + \lambda x^2}$$

adica $\lambda z x^2 - \lambda x + z - 1 = 0$ (8) (**1 punct**)

Dat fiind ca $x \geq 0$, solutiile ecatiei (8) trebuie sa fie reale. Ca urmare, discriminantul ecuatiei avand necunoscuta x trebuie sa fie pozitiv:

$$\lambda[\lambda - 4z(z - 1)] \geq 0$$

din care, evident, $\lambda \geq 0$ si $4z^2 - 4z - \lambda \leq 0$ (9)

din care $z_{mzx} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \lambda}\right)$ (10) (**1 punct**)

Utilizand (10), rezulta ca $y_{\max}^2 = z_{\max}$, adica

$$y_{\max} = \sqrt{z_{\max}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + \lambda})} \qquad (11)$$

ceea ce reprezinta solutia problemei. Aceasta valoare de extrem a raportului pulsatiilor respective se obtine pentru o valoare $x = x^*$ ce rezulta prin substituirea $z = z_{\max}$ exprimat prin (10) in (8). Dupa efectuarea calculelor de rutina se obtine

$$x = x^* = \frac{1}{\lambda}(\sqrt{1 + \lambda} - 1) \qquad (12) \qquad \textbf{(1 punct)}$$